数学物理方法 / 复变函数

第五章学习讲义

留数及其应用

留数算法 → 实积分与围道 → 多值分支 → 辐角原理与数根。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材108—141页　20道自编检查题　离线SVG公式与图解

对应严镇军《数学物理方法》印刷第108—141页；正文从108页到138页上部，习题从138页中部到141页。扫描文件页序仍等于印刷页码加6。本讲义沿原书顺序讲完5.1、5.2的六类内容和5.3，并另加习题路线、检查题及解析。

本章主线 第四章告诉你函数在奇点附近能展开成罗朗级数。本章先问：沿一个小圈积分，究竟会留下哪一项？答案只有负一次幂。把这个系数算出来，再设计一条合适的闭路，就能算复积分、许多实积分，还能数出区域里的零点。

第一轮的过关标准 会选择求留数的方法；会逐个判断奇点在围道内、外还是线上；会写“闭路积分等于目标积分加辅助路径积分”的完整等式；会说明辅助路径为何消失；会用儒歇定理数根并保留重数。背出最后一条留数公式，只完成了其中一小部分。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

5.1 留数定理	教材108—112页；补充对应习题138—139页
5.2.1 三角有理函数的定积分	教材112—115页
5.2.2 三条引理与围道的选择	教材115—118页
5.2.3 有理函数的实积分	教材118—120页
5.2.4 带正弦、余弦的实积分	教材120—121页
5.2.5 杂例：绕点、旋转和平移	教材121—127页
5.2.6 多值函数的积分	教材127—132页，原书带星号
5.3 辐角原理与儒歇定理	教材132—138页上部
5.4 原书习题路线、检查题与速查	原书习题138—141页

第五章 / 5.1

留数定理

教材108—112页；补充对应习题138—139页

5.1 · 教材108—112页；补充对应习题138—139页

01 留数就是负一次幂系数，与奇点阶数不同

设 a 是孤立奇点，去心邻域内有罗朗展开

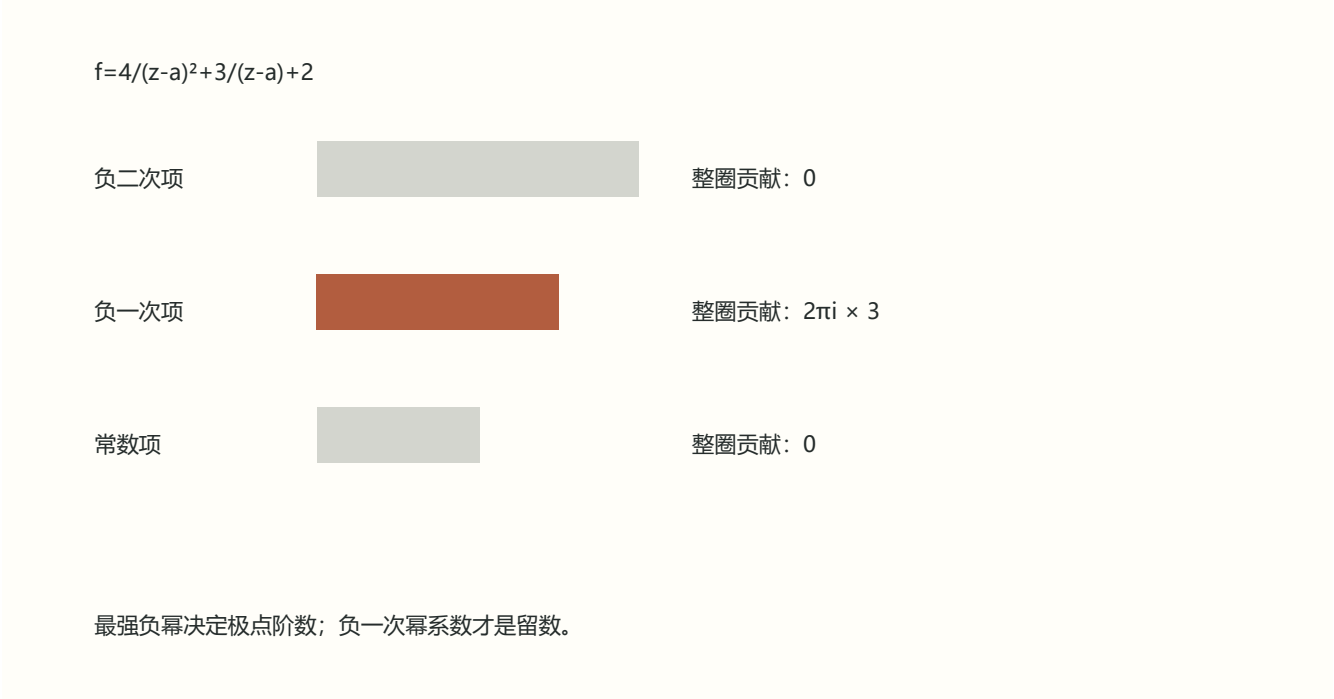
$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\cdots.$$

沿该邻域内包围 a 一周的逆时针小圆积分。第三章已算过：$(z-a)^n$ 的整圈积分只有 $n=-1$ 时不为零，值为 $2\pi i$。因此

$$\oint f(z)\,dz=2\pi i\,a_{-1}.$$

定义 $\mathrm{Res}(f,a)=a_{-1}$。记号可以读作“函数 f 在点 a 的留数”。它不是 a 点的函数值，也不是极点阶数，更不等于负幂部分所有系数之和。

图 5-1 整圈积分只留下负一次幂



图示 二阶项也存在，但留数为3；留数=3；闭路正向一周的积分=3 × 2πi。

两个必须对照的例子 $1/(z-a)^2$ 有二阶极点，但留数为0；$e^{1/(z-a)}$ 有本性奇点，却有留数1。前者积分为0，后者整圈积分为 $2\pi i$。所以“留数为零”不能推出可去奇点，“本性奇点”也不妨碍使用留数定理。

这段定义必须理解：它把第四章的展开与第三章的积分接上。以后具体计算往往不用真的写出完整罗朗级数，但所用简便公式都在提取同一个 a_{-1}。

5.1 · 教材108—112页；补充对应习题138—139页

02 留数定理：先列点的位置，再把内部贡献相加

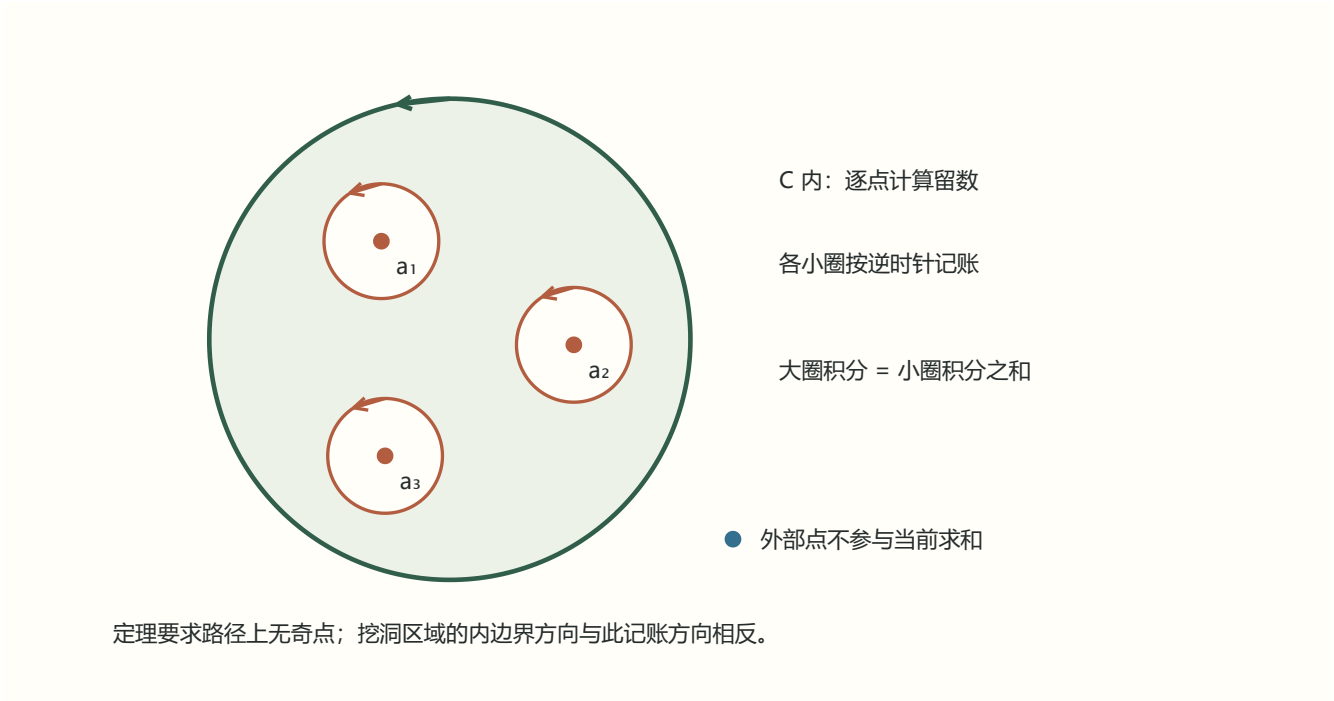
若 C 是正向简单闭曲线，f 在曲线及内部除有限个孤立奇点 $a_1,\dots,a_n$ 外解析，并且**曲线上没有奇点**，则

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_k \text{ 在 } C \text{ 内}} \operatorname{Res}(f,a_k).}$$

正向即逆时针。顺时针一周要整体加负号；曲线绕多圈或有自交时，要用相应绕数加权，不能无条件仍把每个点算一次。第一轮题目通常给简单闭曲线，按此版本即可。

证明的主线与第三章挖洞相同：在各奇点周围挖互不相交的小圆，外边界积分等于这些小圆的逆时针积分之和；每个小圆积分正好是 $2\pi i$ 乘该点留数。无需在整个大区域写一个共同的罗朗展开。

图 5-2 挖掉内部孤立奇点后，把大圈变成小圈之和



图中小圈都按各自逆时针书写，因此外圈积分等于它们的积分之和。

每题先写这四行 围道和方向；全部候选奇点；哪些真正留下奇点、哪些在内部；内部各点的留数。最后才相加。若点恰在线上，先停止套公式，判断题目是否另行规定主值或绕行。

5.1 · 教材108—112页；补充对应习题138—139页

03 一阶极点：消掉一个因子，或用分母导数

若 a 是一阶极点，

$$\operatorname{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

若 $f=P/Q$，P,Q 在 a 附近解析，$Q(a)=0$、$Q'(a)\neq 0$，则更方便：

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q},a\right)=\frac{P(a)}{Q'(a)}.}$$

理由是 $Q(z)/(z-a)\to Q'(a)$。若 $P(a)=0$，该点可能抵消成可去点，公式给0仍可用于解析延拓后的留数，但不要再称它为一阶极点。若 $Q'(a)=0$，此简式不能直接用。

例题 $f=1/(z^2+1)$，在 i 的留数为 $1/(2i)$，在 $-i$ 的留数为 $-1/(2i)$。同一函数不同点要分别代入。指数分母同理：$1/(e^z-1)$ 在每个 $2k\pi i$ 都是一阶极点，留数均为1，因为分母导数在那里等于1。

5.1 · 教材108—112页；补充对应习题138—139页

04 高阶极点：先认准阶数，再决定求导或展开

若 a 为 m 阶极点，写

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z-a)^m},\qquad h\text{ 在 }a\text{ 解析},\quad h(a)\neq 0.$$

则

$$\boxed{\operatorname{Res}(f,a)=\frac{h^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.}$$

因为 h 的泰勒展开里，第 $m-1$ 次项除以 $(z-a)^m$ 后恰好成为负一次幂。二阶极点求一阶导；三阶极点求二阶导再除2；阶数高时可直接展开到所需项，未必硬求许多次导数。

完整示范 $f=e^z/(z-1)^2$，令 $h=e^z$，所以留数为 $h'(1)=e$。这与 $e^z=e[1+(z-1)+\cdots]$ 中取一次项完全一致。

先约掉再判阶 $z\sin z/(1-e^z)^3$ 在0处，分子有二阶零点、分母有三阶零点，实际只剩一阶极点。若一眼看见分母三次方就开始求二阶导，会白做许多计算。

5.1 · 教材108—112页；补充对应习题138—139页

05 教材例1：同一个和式，在不同点只看奇异部分

教材取

$$f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}+\frac{e^z}{z-1}.$$

在 $z=1$，第一项解析，留数为0；第二项留数为 e。故 $\mathrm{Res}(f,1)=e$。

在 $z=-1$，第二项解析，不参与留数。第一项是三阶极点，用分子二阶导：

$$\mathrm{Res}(f,-1)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\sin 2z\bigg|_{z=-1}=\frac{1}{2}[-4\sin(-2)]=2\sin 2.$$

这里不应把整个和式统一乘 $(z+1)^3$ 后展开一大堆。**解析项在当前点留数为零**，可以先删掉。

5.1 · 教材108—112页；补充对应习题138—139页

06 教材例2：正切有无穷多个极点，但每条有限围道只数内部

$\tan\pi z=\sin\pi z/\cos\pi z$ 的极点为 $a_k=k+1/2$，均为一阶极点，其留数

$$\frac{\sin\pi a_k}{-\pi\sin\pi a_k}=-\frac{1}{\pi}.$$

在 $|z|=1/3$ 内没有极点，所以积分为0。在 $|z|=n$（n 为正整数）内，有 $\pm1/2,\pm3/2,\dots,\pm(n-1/2)$，共 $2n$ 个，曲线上没有极点。因此

$$\oint_{|z|=n}\tan\pi z\,dz=2\pi i\left(-\frac{2n}{\pi}\right)=-4ni.$$

这题训练的是“全体奇点可以无穷多，但当前闭路内必须能逐个有限计数”，以及 cos 求导带负号。

5.1 · 教材108—112页；补充对应习题138—139页

07 本性奇点不必全展开：只追踪能凑成负一次幂的项

教材例3为 $f=z^3\sin^5(1/z)$。展开 $\sin(1/z)$ 只含奇数负幂，五次方仍只含奇数负幂，乘 z^3 后只含偶数幂，根本不可能出现 z^{-1}。故0虽是本性奇点，留数却为0，绕单位圆积分为0。

这个判断也可用奇偶性：$\sin^5(1/z)$ 是奇函数，乘奇函数 z^3 后为偶函数，罗朗展开只含偶次幂。**先看结构，再展开**，能省去大量乘法。

教材例4为 $z\sin z/(1-e^z)^3$。直接只看最低次项：

$$z\sin z = z^2[1+O(z^2)], \qquad (1-e^z)^3 = -z^3[1+O(z)].$$

所以 $f=-1/z+O(1)$，留数为 -1。单位圆只包围0，不包含其他 $2k\pi i$，积分为 $-2\pi i$。这里 $O(z)$ 表示被 $|z|$ 的常数倍控制，首项已经足以求出留数。

5.1 · 教材108—112页；补充对应习题138—139页

08 无穷远点的留数：变量变换还有一个微分因子

原书习题2把第四章的无穷远奇点接到留数。定义相对于无穷远点的正向，是平面上一条**顺时针大圆**，于是

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{f(1/w)}{w^2},0\right).$$

负号来自 $z=1/w$、$dz=-dw/w^2$。无穷远留数不是简单求 $f(1/w)$ 在0的留数，微分因子不能漏掉。若 f 在大 $|z|$ 区域的罗朗展开含 c_{-1}/z，则无穷远留数为 $-c_{-1}$。

若扩充平面上只有有限个有限孤立奇点和一个无穷远孤立奇点，那么全部留数（包括无穷远）之和为0。例：$f=1/z$，有限留数1，无穷远留数 -1；$f=z$ 在无穷远有极点，但留数为0。留数仍不能直接说明奇点类型。

掌握边界 正文最常考有限点的三种算法：一阶极限、商的分母导数、高阶提取。无穷远公式主要服务原书习题2和绕大圈的快捷计算，第二轮再熟练，但应先知道多出的 $-1/w^2$ 为什么存在。

第五章 / 5.2.1

三角有理函数的定积分

教材112—115页

5.2.1 · 教材112—115页

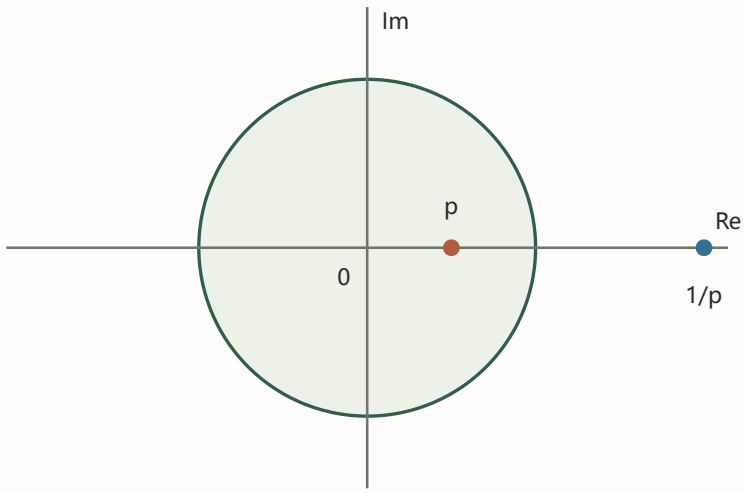
09 先把一个完整周期变成单位圆一周

对 $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$，只要原积分有意义，令 $z=e^{i\theta}$。必须同时替换三样：

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-z^{-1}), \quad d\theta=\frac{dz}{iz}.$$

于是积分变成单位圆逆时针的有理函数闭路积分。$1/(iz)$ **是微分带来的，不能漏掉**；它可能引入0点的候选奇点，也可能与化简后的分子消掉，必须看最终表达式。

图 5-3 三角换元后的极点 p 与 1/p



z=e^{iθ}，单位圆逆时针

dθ=dz/(iz)

p 在内，1/p 在外

原题先检查 0<p<1

p 与 1/p 跨过单位圆时，内部极点交换；p=1 时原积分发散。

图示 p=0.5；当前 p=0.5，内部极点为 p=0.5。

若积分区间是 $[0,\pi]$ 或 $[0,\pi/2]$，先利用周期与对称性补成整圈，写清倍数。不可不说明就把半周期直接当成单位圆一周。含 $\sin\theta$ 的表达式不一定关于 π 对称，更要实际检查。

5.2.1 · 教材112—115页

10 教材例1：泊松型积分的两个互为倒数的极点

求

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2},\qquad 0<p<1.$$

代换并化简：

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{i(1-pz)(z-p)}.$$

候选极点是 p 和 $1/p$。由于 $0<p<1$，只有 p 在内。其留数为 $1/[i(1-p^2)]$，所以

$$\boxed{I=\frac{2\pi}{1-p^2}.}$$

这题应能不看答案完整重算一次，尤其检查化简时 z 因子如何抵消。若题设改为 $p>1$，内部点交换，结果为 $2\pi/(p^2-1)$；$p=1$ 时原积分在 $\theta=0,2\pi$ 发散，不属于同一普通积分公式。

5.2.1 · 教材112—115页

11 分子有 cos mθ：先合并成指数，避免凭空增加极点

教材例2求 $\int_0^{\pi}\cos(m\theta)/(5-4\cos\theta)\,d\theta$，$m$ 为正整数。原被积函数关于 $\theta\mapsto 2\pi-\theta$ 对称，半周期积分是全周期的一半。

先计算全周期复积分

$$J_m=\int_0^{2\pi}\frac{e^{im\theta}}{5-4\cos\theta}\,d\theta=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{5z-2(z^2+1)}\,dz.$$

分母为 $-2(z-1/2)(z-2)$，只有 $1/2$ 在内；解析分子 z^m 不会在0引入负幂。去掉外面的 $1/i$ 后，留数为 $1/(3\cdot 2^m)$。故 $J_m=2\pi/(3\cdot 2^m)$，为实数。

因此原积分为

$$\boxed{\int_0^{\pi}\frac{\cos(m\theta)}{5-4\cos\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{3\cdot 2^m}.}$$

全周期正弦部分为0，也可直接由对称性核验。若直接代入 $\cos m\theta=(z^m+z^{-m})/2$ 仍能做，但会引入0处高阶项；采用指数法是为了少算这些抵消项。

第五章 / 5.2.2

三条引理与围道的选择

教材115—118页

5.2.2 · 教材115—118页

12 大圆弧：函数趋零还不够，先乘上弧长

若大圆弧 $C_R:z=Re^{i\theta}$ 的角跨度固定为 $\beta-\alpha$，曲线上 $M(R)=\max|f|$，则

$$\left|\int_{C_R}f(z)\,dz\right|\le M(R)R|\beta-\alpha|.$$

所以 $Rf(z)\to 0$ 在相应角域内统一成立，是大弧消失的充分条件。教材引理1就是这个结论。有理函数分母次数至少比分子高2时，$M(R)=O(R^{-2})$，乘弧长 $O(R)$ 后趋零。

最简单的反例 $1/z \to 0$，但半圆弧积分恒为 $i\pi$，不消失；因为它只有 $O(1/R)$，乘弧长后为常数量级。不能把“函数很小”偷换成“它沿长曲线的积分很小”。

5.2.2 · 教材115—118页

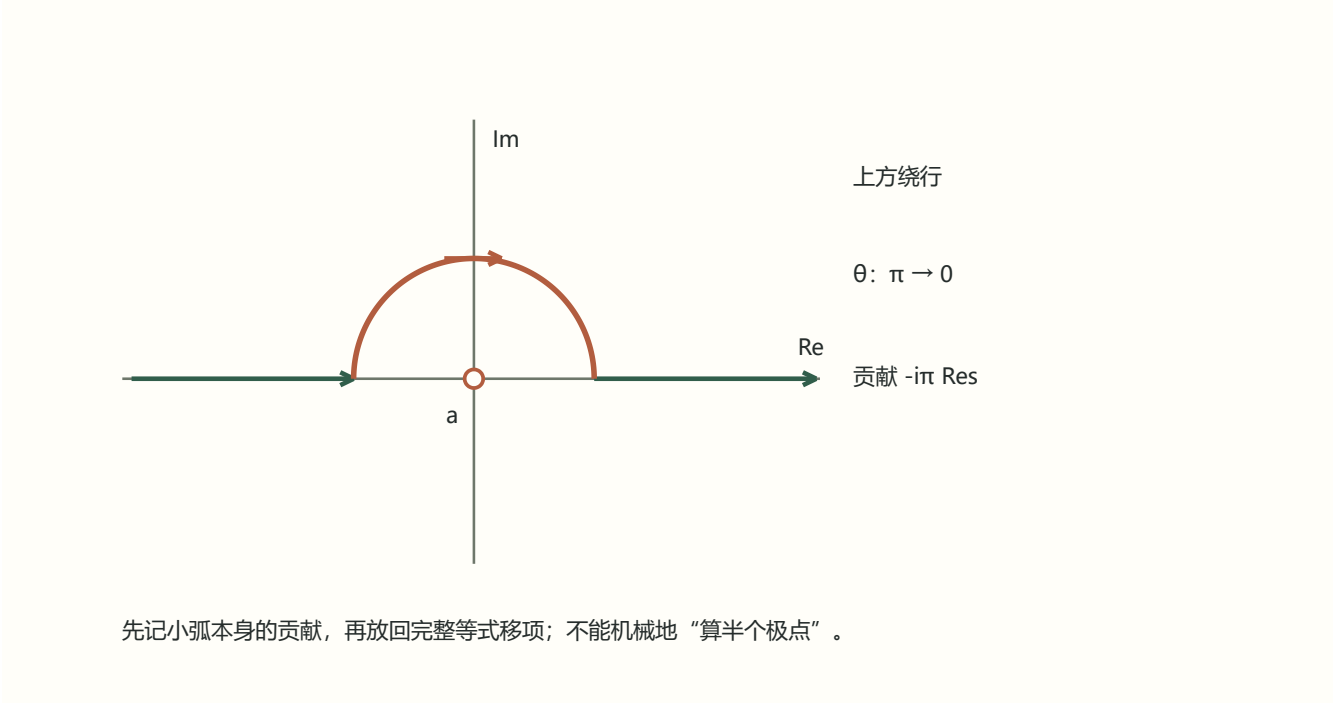
13 小圆弧：一个简单极点留下角跨度乘留数

若 $(z-a)f(z) \to k$，沿小圆弧 $z = a + re^{i\theta}$、$\theta : \alpha \to \beta$，则

$$\int_{C_r} f(z)\,dz \longrightarrow i(\beta - \alpha)k.$$

一阶极点时 $k = \mathrm{Res}(f, a)$。证明拆成 $k/(z-a)$ 与余项，余项模为 $o(1/r)$，乘弧长 $O(r)$ 后消失。若 $k = 0$，整段小弧消失。

图 5-4 从左向右绕过实轴点，小弧的方向决定符号



图示 从上方绕过：顺时针小半圆；从左到右的上半小弧为顺时针。

上半平面绕开实轴点 沿实轴从左往右，在点 a 上方挖一条小半圆，参数角由 π 降到0，是顺时针，贡献 $-i\pi\,\mathrm{Res}(f, a)$。小弧是在辅助等式左边的哪一项，必须先写出来，最后移项才决定目标积分中出现什么符号。

不要说“曲线上极点算一半” 不是把留数定理中的点机械地算半个，而是先绕开，使定理有合法路径，再精确计算小弧极限。高阶极点的小弧一般还可能发散，这个一阶极点公式不能直接照搬。

5.2.2 · 教材115—118页

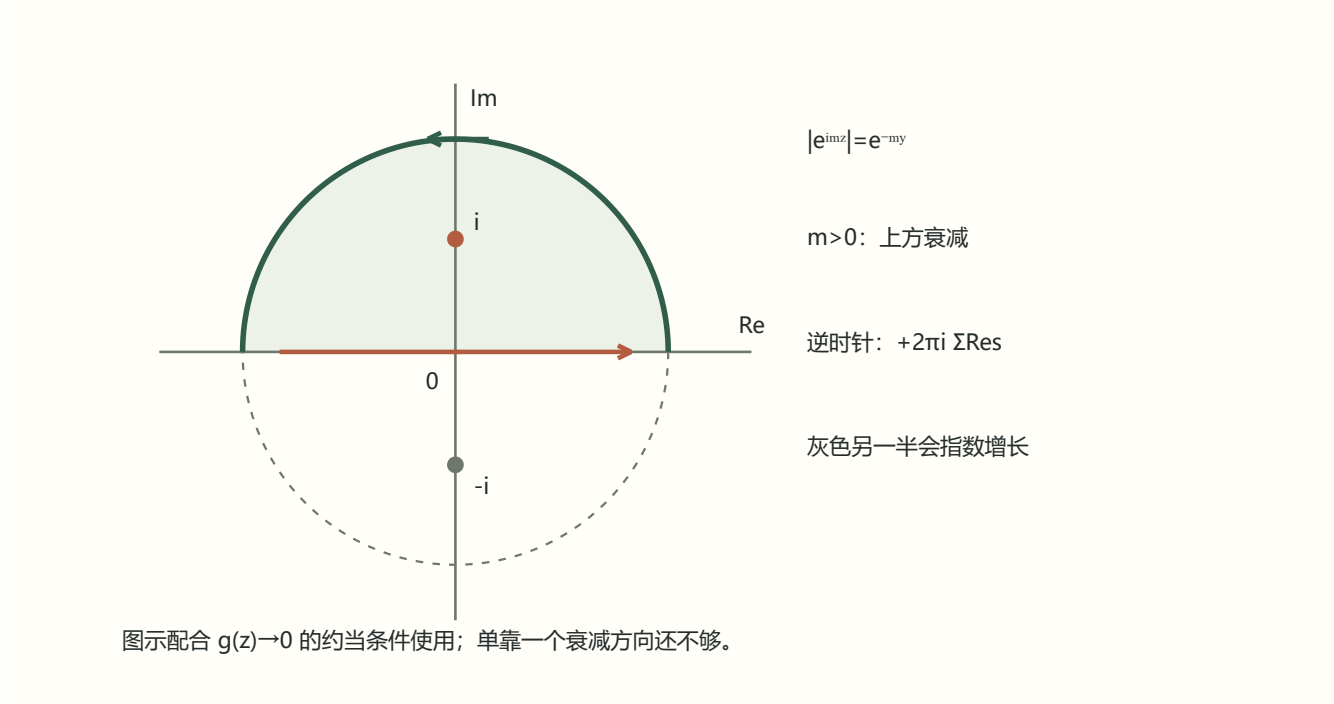
14 约当引理：指数在上半平面衰减，端点也要控制

对 $m>0$，$|e^{imz}|=e^{-m\operatorname{Im}z}$。上半平面衰减，下半平面增长，所以常把 $g(z)e^{imz}$ 闭合到上方。若上半圆上 $M(R)=\max|g|\to 0$，约当引理给

$$\int_{C_R} g(z)e^{imz}\,dz\to 0.$$

与普通大弧估计相比，它允许 $g=O(1/R)$，不必达到 $O(1/R^2)$。

图 5-5 指数的参数符号决定闭合的半平面



图示 m>0：闭上半平面；实轴从左向右，上弧从右向左；加上半平面留数。

证明主线要看懂端点 取 $z=Re^{i\theta}$，积分模不超过 $M(R)R\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\theta}d\theta$。用 $\sin\theta\geq 2\theta/\pi$（$0\leq\theta\leq\pi/2$）及对称性，积分上界可压到 $\pi M(R)/m\to 0$。即使端点处指数模为1，整个端点小区间仍能被控制。

教材给出半平面下缘为 $\operatorname{Im}z=-a$ 的较宽版本，把低于实轴的一小段圆弧单独估计；第一轮标准上半圆版本足以处理本章多数习题。若 $m<0$，改闭下半平面，方向通常顺时针，留数定理前变成 $-2\pi i$。

5.2.2 · 教材115—118页

15 辅助函数与围道要一起选：把目标放进一条完整等式

留数法没有一个包打天下的代换。先问目标能否成为 $F(x)$、$\operatorname{Re} F(x)$ 或 $\operatorname{Im} F(x)$，再问剩下的路径积分能否消失或换回同一个目标。

目标的结构	常选的辅助函数或围道	为什么
完整周期三角有理式	$z=e^{i\theta}$，单位圆	三角变有理式
全实轴有理式	$F=R(z)$，半圆	大弧由次数差消失
乘正弦、余弦	$F=R(z)e^{imz}$，按符号选半平面	指数衰减
实轴有辅助极点	绕开的小半圆	保留确定的小弧贡献
e^{ix^2}	旋转 $\pi/4$ 的射线或三角形	二次相位变高斯衰减
高斯乘余弦	平移的矩形	上边和下边相互联系
非整数幂	沿分支切口的钥匙孔	上下岸相差相位

解答必须出现的一句等式 不是只写“由留数定理，答案为……”，而是先写 $\int_{\text{目标段}} F+\int_{\text{辅助段}} F=2\pi i\sum \operatorname{Res}$，并交代每条辅助段的极限。你的主要得分点通常就在这些条件和符号上。

第五章 / 5.2.3

有理函数的实积分

教材118—120页

5.2.3 · 教材118—120页

16 全实轴有理积分的标准模板

设 $R=P/Q$，约去共同因子后实轴没有极点，分母次数至少比分子高2。于是实轴两端绝对收敛。取实线段 $[-R,R]$ 加上逆时针上半圆（此处同一个字母 R 也常用于半径，具体解题可改记半径 T），有

$$\int_{-T}^{T} R(x)\,dx+\int_{C_T} R(z)\,dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a_k>0}\operatorname{Res}(R,a_k).$$

大弧因次数差趋零，故

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k>0} \operatorname{Res}(R, a_k).}$$

这里只加上半平面内的点。若闭下方，则曲线顺时针，应写 $-2\pi i$ 乘下半平面留数和；结果当然一致，可以选计算更少的一边。

半轴题先看奇偶性 若 $R(x)$ 偶，则 $\int_0^\infty R = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R$。若没有偶性，不能直接除2。若实轴有极点，先判断原积分是否存在，不能套这条没有实轴极点的模板。

5.2.3 · 教材118—120页

17 教材例3：三阶极点也只求一个系数

求

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}, \qquad a>0.$$

上半平面只有 $z = ia$，为三阶极点；下方的 $-ia$ 不参与当前留数和。消掉三阶因子后

$$h(z) = \frac{1}{(z+ia)^3}, \qquad h''(z) = \frac{12}{(z+ia)^5}.$$

所以

$$\operatorname{Res}(f, ia) = \frac{h''(ia)}{2} = \frac{6}{(2ia)^5} = \frac{3}{16ia^5}.$$

乘 $2\pi i$ 得

$$\boxed{I = \frac{3\pi}{8a^5}.}$$

大弧上 $|z^2+a^2| \ge T^2 - a^2$，弧长 πT，上界 $\pi T/(T^2-a^2)^3 \to 0$。别因为有理函数次数明显就完全省掉说明，写这个上界很短，也能证明条件确实满足。

5.2.3 · 教材118—120页

18 普通广义积分与主值：对称截断不自动代表收敛

普通 $\int_{-\infty}^{\infty} f$ 要求在一个固定点拆开的左右两端分别收敛；若实轴有奇点，两侧也分别要求收敛。柯西主值则规定对称地取极限，例如

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx.$$

在0有奇点时，还要规定删除对称小区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 后的极限。取极限的方式属于定义，必须写清。

例如 $\mathrm{PV}\int_{-1}^{1} dx/x = 0$，但普通广义积分不存在。又如 $x/(1+x^2)$ 的对称主值为0，而左右无穷端分别对数发散。**留数围道自然给出某种对称截断时，要先检查它算的是普通积分还是主值。** 上一模板因绝对收敛，所以两者一致；不能在缺少收敛检查时沿用这个结论。

第五章 / 5.2.4

带正弦、余弦的实积分

教材120—121页

5.2.4 · 教材120—121页

19 把 cos 和 sin 打包成指数，再取实部、虚部

设 $m>0$，$R(x)$ 为实轴上实值的有理函数，无实轴极点，分母次数至少比分子高1。先算

$$J=\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{imx}\,dx.$$

这些有理函数的尾部配合振荡可保证两端相应积分收敛；若次数差只为1，可能是条件收敛，不能声称一定绝对收敛。上半圆用约当引理，得

$$J = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a_k>0}\operatorname{Res}(R(z)e^{imz}, a_k).$$

此时 $\operatorname{Re} J$ 是余弦积分，$\operatorname{Im} J$ 是正弦积分。这里强调 $R(x)$ 实值，是为了合法地把 R 原样移出实、虚部运算；若 R 本身复值，需另行拆分。

不要选 $R(z)\cos mz$ 闭上半平面后指望自动衰减，因为 $\cos mz$ 中还含 e^{-imz}，上方会增长。选择 e^{imz} 的目的，就是只保留能衰减的那一支。$m=0$ 时不能依赖这个引理，回到有理积分的次数条件。

5.2.4 · 教材120—121页

20 教材例4的推广：二阶极点算出带参数的余弦积分

求 $a>0, m>0$ 时

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(mx)}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

选 $F=e^{imz}/[(z-ia)^2(z+ia)^2]$。上方唯一二阶极点在 ia，留数为

$$\left.\frac{d}{dz}\frac{e^{imz}}{(z+ia)^2}\right|_{z=ia}=e^{-ma}\left[\frac{im}{(2ia)^2}-\frac{2}{(2ia)^3}\right]=-\frac{i(1+ma)e^{-ma}}{4a^3}.$$

因此 $J=\pi(1+ma)e^{-ma}/(2a^3)$ 为实数，原积分即

$$\boxed{I=\frac{\pi(1+ma)e^{-ma}}{2a^3}.}$$

全实轴正弦积分为0，既可由虚部为零看出，也可由奇偶性检查。取 $m=1$ 就是原书例4；若题目改为 $[0,\infty)$，偶性使结果再除2。

5.2.4 · 教材120—121页

21 一个简单极点与半轴 x sin(mx) 型积分

先算 $a>0,m>0$ 的

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{a}e^{-am},$$

因为 ia 的留数为 $e^{-am}/(2ia)$。若分子有 x，则 $ze^{imz}/(z^2+a^2)$ 在 ia 的留数为 $e^{-am}/2$，因此复积分为 $\pi i e^{-am}$。

取虚部并用 $x\sin(mx)/(x^2+a^2)$ 的偶性，得

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{x\sin(mx)}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-am}.}$$

这与原书习题6的第一类直接对应。它的尾部像 $\sin(mx)/x$，一般仅条件收敛，但约当引理仍可用。先判函数奇偶性，再决定取全轴的一半，能防止最后丢一个2。

第五章 / 5.2.5

杂例：绕点、旋转和平移

教材121—127页

5.2.5 · 教材121—127页

22 教材例5：sinc平方为何要引入一个有极点的辅助函数

求 $I=\int_0^\infty(\sin x/x)^2dx$。原被积函数在0可补连续，没有真正发散；但直接把 $\sin^2 z$ 闭到上方会指数增长。利用 $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$，改选

$$F(z)=\frac{e^{2iz}-1}{z^2}.$$

在0附近 $F=2i/z-2+O(z)$，所以辅助函数有一阶极点，留数为 $2i$。这不矛盾：**原实积分和辅助复函数可以有不同的奇点结构**。

沿上方挖小半圆，把0排除在区域外，闭路内无奇点。完整等式是

$$\int_{-T}^{-\varepsilon}F(x)dx+\int_{C_\varepsilon}Fdz+\int_{\varepsilon}^{T}F(x)dx+\int_{C_T}Fdz=0.$$

大弧上两项 e^{2iz}/z^2 与 $-1/z^2$ 都消失。小弧顺时针，贡献 $-i\pi(2i)=2\pi$。所以

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx=-2\pi.$$

取实部得到 $\int_{-\infty}^{\infty}(\cos 2x-1)/x^2dx=-2\pi$，即全轴 sinc 平方积分为 π，半轴为

$$\boxed{I=\pi/2.}$$

实部在0可补连续，得到的是普通收敛积分；虚部 $\sin 2x/x^2$ 在0近似 $2/x$，这里只具有对称主值。原书中这一步的复辅助积分应按主值理解，不能把虚部拆成两侧普通广义积分。

5.2.5 · 教材121—127页

23 同一小弧思路得到狄利克雷积分

对 $m>0$，用 $F=e^{imz}/z$ 并向上绕开0。闭路内无极点，大弧用约当引理，小弧贡献 $-i\pi$，故

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x}\,dx=i\pi.$$

虚部 $\sin(mx)/x$ 在0可补成 m，在无穷端振荡收敛；它是偶函数。因此

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x}\,dx = \pi/2 \quad (m>0).}$$

若 $m<0$，结果变为 $-\pi/2$，可用奇性或闭下半平面推得。$m=0$ 时积分为0，不能从 $m>0$ 的公式直接代入极限得到 $\pi/2$；积分与参数极限在这里不能任意交换。

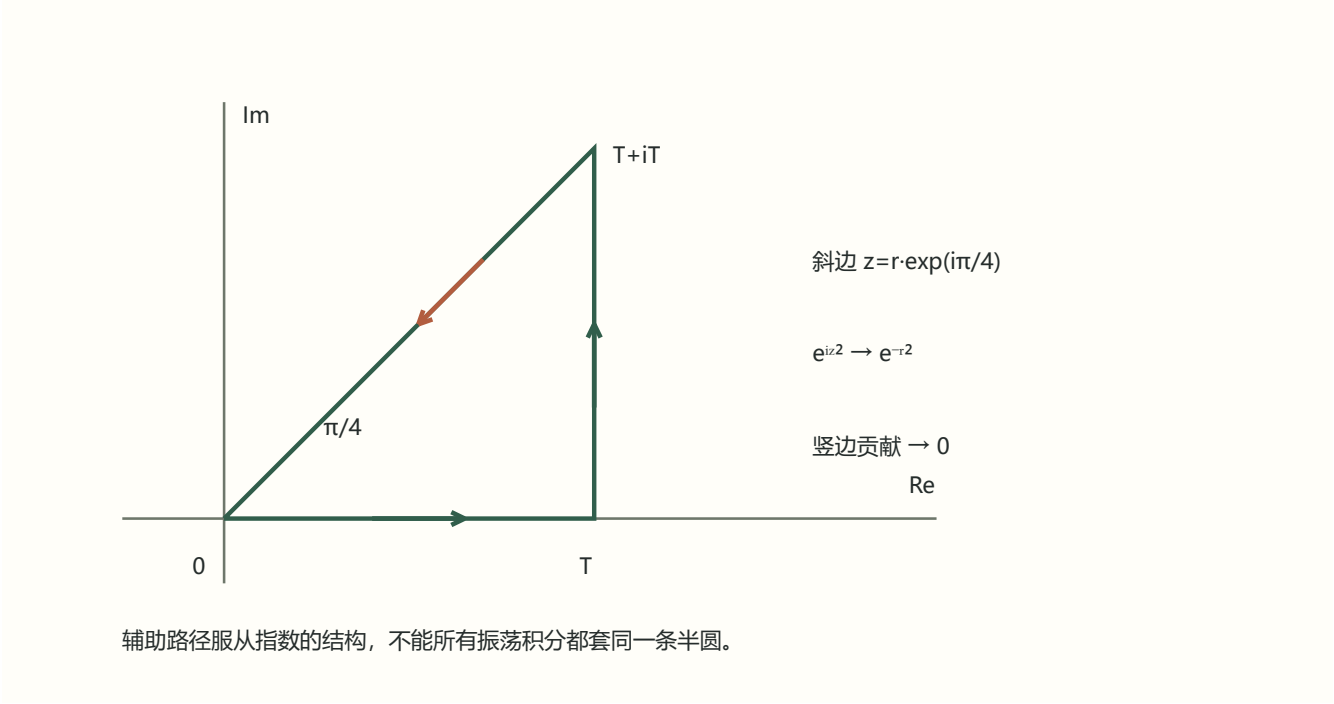
这一例是为原书习题6里的含 $1/x$ 正弦积分作准备。不要把 $\int_0^\infty \sin x/x$ 判成0：偶性发生在整个被积函数，不是只看分子 $\sin x$。

5.2.5 · 教材121—127页

24 教材例6：菲涅耳积分的三角形围道

求 $I_c=\int_0^\infty \cos x^2 dx$、$I_s=\int_0^\infty \sin x^2 dx$。选 $F=e^{iz^2}$，沿三角形 $0\to T\to T+iT\to 0$。函数整，闭路积分为0。

图 5-6 二次相位要旋转，高斯平移要用矩形



图示 菲涅耳积分：三角形围道；三角形的斜边反向走回原点；旋转让二次振荡变成高斯衰减。

竖边 $z=T+iy$，模为 e^{-2Ty}，故其积分模不超过 $(1-e^{-2T^2})/(2T)\to 0$。斜边角为 $\pi/4$，写 $z=re^{i\pi/4}$，从 $r=\sqrt{2}T$ 走回0，于是

$$\int_{\text{斜边}} e^{iz^2}dz = -e^{i\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}T} e^{-r^2}dr.$$

令 $T\to\infty$，利用高斯积分 $\int_0^\infty e^{-r^2}dr=\sqrt{\pi}/2$，得

$$I_c + iI_s = e^{i\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \boxed{I_c = I_s = \sqrt{\pi/8}.}$$

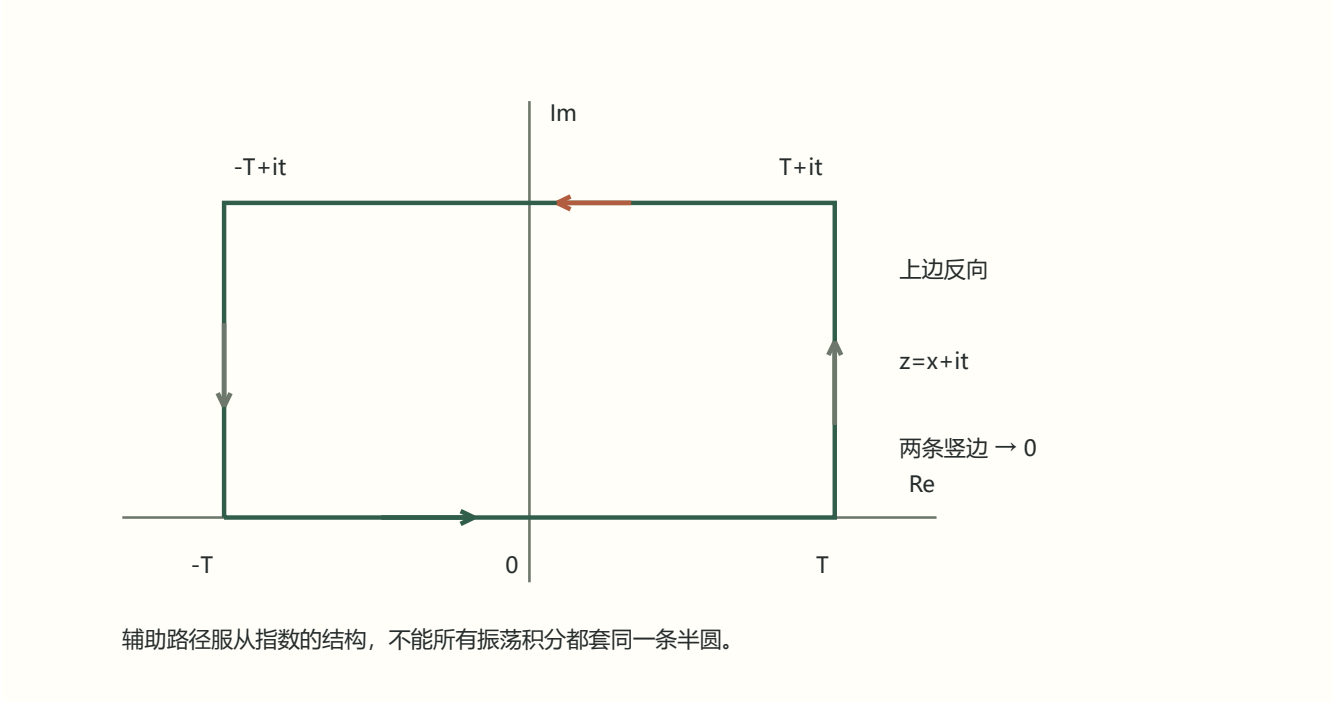
原实积分的条件收敛可用 $t = x^2$ 后的狄利克雷判别说明。为什么不用普通上半圆？$|e^{iz^2}| = e^{-r^2\sin 2\theta}$ 在第二象限会增长；必须根据二次相位选方向。此题的核心是让 iz^2 变成负实数。

5.2.5 · 教材121—127页

25 教材例7：高斯乘余弦要用平移的矩形

求 $a>0, b\in\mathbb{R}$ 的 $I=\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,dx$。先令 $u=\sqrt{a}\,x$，记 $t=b/(2\sqrt{a})$，把问题归结到 $J(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos(2tu)du$。

图 5-7 高斯余弦积分的矩形围道与上边反向



矩形上边与下边关联，而不是直接消失；高斯平移由此产生 e^(-t²)。

对 $t\ge 0$，取 $F=e^{-z^2}$ 沿矩形 $-T\to T\to T+it\to -T+it\to -T$ 积分。两条竖边模均被 $e^{-T^2}\int_0^t e^{y^2}dy$ 控制，趋零。上边反向，且

$$e^{-(x+it)^2}=e^{t^2}e^{-x^2}e^{-2itx}.$$

虚部在对称区间为奇函数，积分为0。因此闭路积分为零给出

$$\sqrt{\pi}-e^{t^2}J(t)=0.$$

由余弦对 b 的偶性，结果延伸到所有实 b；再回到原变量并除2：

$$\boxed{I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/(4a)}.}$$

这题没有任何极点，仍然属于复积分方法的应用。保留它，是要训练“辅助边不一定消失，也可以变成目标积分的倍数”。第一轮若考试只考留数半圆模板，可第二轮再熟练矩形构造；正文的推导和用途都应看懂。

第五章 / 5.2.6

多值函数的积分

教材127—132页，原书带星号

5.2.6 · 教材127—132页，原书带星号

26 多值表达式要先选成单值解析分支

留数定理用于一个确定的单值解析函数，不能把 $\operatorname{Ln} z$ 的全部值直接放进积分。选一个角度区间后定义 $L(z)=\ln|z|+i\theta$，同时删去相应射线。该开域内 $L'=1/z$，而切口上下岸有不同边界值。

本节沿用教材的 $0<\theta<2\pi$，即沿正实轴割开。正实轴上岸 $L=\ln x$，下岸 $L=\ln x+2\pi i$；负实轴在域内，$L(-x)=\ln x+i\pi$。这里说上、下岸，是把实际路径放在开域内、最后贴近切口取极限。

与第二章的主值区分 本书第二章主值角是 $(-\pi,\pi]$，本节的 $0<\theta<2\pi$ 是另一个分支，不能因为同样写 $\ln z$ 就忽略角度约定。对上半平面的点 i，两种分支恰好都给 $i\pi/2$，但不能据此说它们在全域相同。

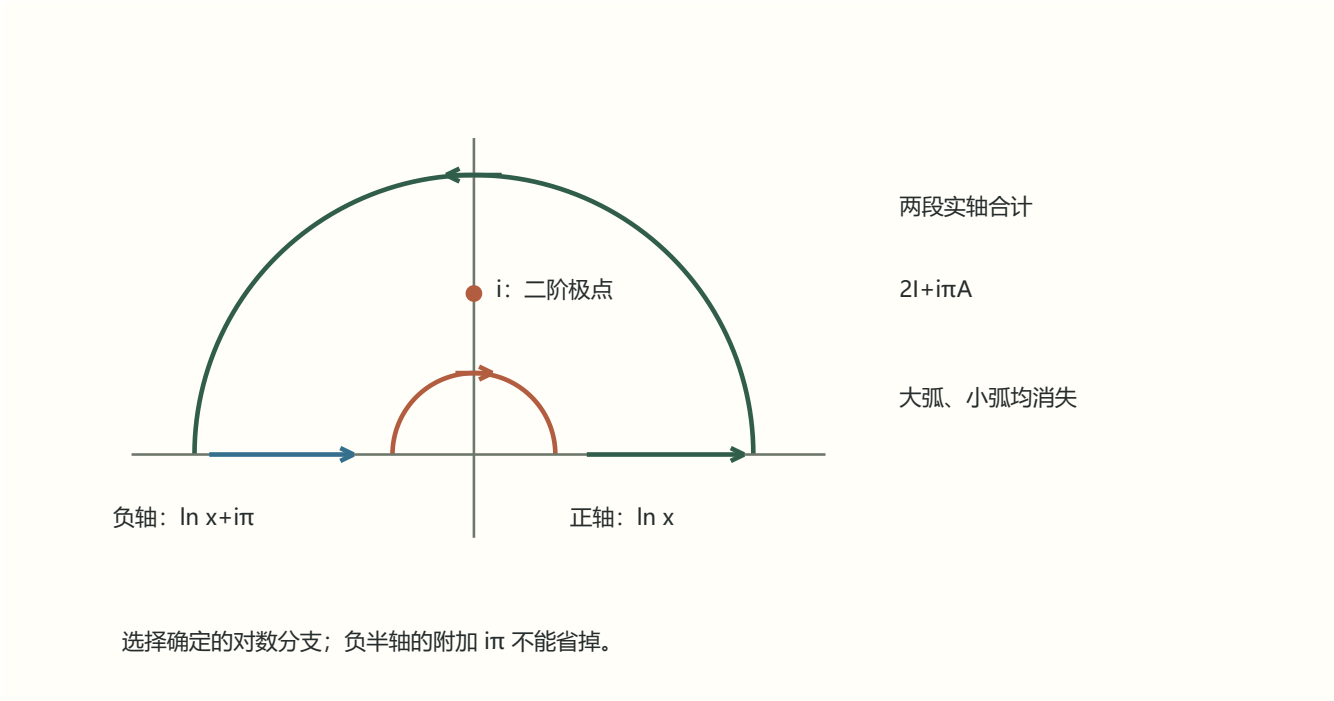
5.2.6 · 教材127—132页，原书带星号

27 教材例8：对数乘偶有理函数，用上半圆连接正负半轴

求 $I=\int_0^\infty \ln x/(1+x^2)^2dx$。选 $F=L(z)/(z^2+1)^2$，沿上半圆闭合并绕开0。负实轴 $z=-x$ 上有 $L=\ln x+i\pi$，分母仍为 $(1+x^2)^2$，所以两条实轴段合起来，在极限中成为

$$2I+i\pi A,\qquad A=\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\pi/4.$$

图 5-8 上半平面对数围道把两条实半轴联系起来



正轴积分为 I，负轴贡献 I+iπA；上方极点只包括 i。

上方唯一极点为 i，二阶留数

$$\operatorname{Res}(F,i)=\frac{d}{dz}\frac{L(z)}{(z+i)^2}\bigg|_{z=i}=\frac{i}{4}+\frac{\pi}{8}.$$

大弧上界量级为 $(\ln T)/T^3\to 0$，小弧量级为 $\varepsilon|\ln\varepsilon|\to 0$。故

$$2I+i\pi A=2\pi i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{i}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2 i}{4}.$$

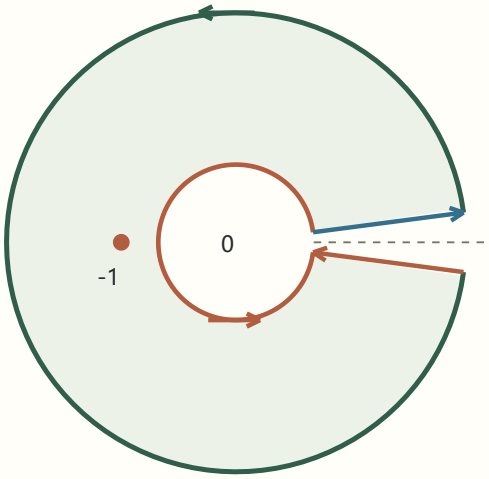
比较实部得到 $\boxed{I=-\pi/4}$，虚部还核对了 $A=\pi/4$。这题不能用 $\ln(-x)=\ln x$，那会直接丢掉决定等式正确性的 $i\pi$。

5.2.6 · 教材127—132页，原书带星号

28 钥匙孔围道：上下岸方向相反，数值也可能不同

对非整数实数 p，选 $F=z^pR(z)=e^{pL(z)}R(z)$，分支为 $0<\arg z<2\pi$。从正实轴上岸的 ε 走向 T，沿大圆逆时针绕到下岸，再沿下岸从 T 回 ε，最后绕小圆顺时针回起点。

图 5-9 钥匙孔围道：两岸相位不同，方向相反



上岸：θ→0，向右

$z^p=x^p$

下岸：θ→2π，向左

$z^p=\exp(2\pi ip)\,x^p$

两岸合计 $[1-\exp(2\pi ip)]I$

原点是挖掉的分支点；留数和取切口域内其余全部孤立奇点。

图中相位记为 e^(2πip)；下岸反向是另一个负号来源。

上岸积分为 $\int_\varepsilon^T x^pR(x)dx$。下岸由于 $z^p=e^{2\pi ip}x^p$ 且方向反向，贡献为 $-e^{2\pi ip}\int_\varepsilon^T x^pR(x)dx$。若大、小弧都趋零，便得到

$$\boxed{(1-e^{2\pi ip})I=2\pi i\sum \mathrm{Res}(z^pR(z),a_k),\quad I=\int_0^\infty x^pR(x)dx.}$$

留数和取这个分支域内的全部有限孤立奇点，通常包含上、下半平面两边，**不是只取上半平面**。原点是分支点，位于挖掉的小圆内，不是把它当普通孤立极点加入留数和。

5.2.6 · 教材127—132页，原书带星号

29 教材例9：从收敛范围到分支值，一个条件都不能漏

求 $I_p=\int_0^\infty x^p/(1+x)dx$。0附近像 x^p，要求 $p>-1$；无穷端像 x^{p-1}，要求 $p<0$。所以普通积分存在范围为 $-1<p<0$。

取上一个钥匙孔模板，唯一极点在 -1，由于本分支 $\arg(-1)=\pi$，留数为 $e^{i\pi p}$。小弧量级 $\varepsilon^{p+1}\to 0$，大弧量级 $T^p\to 0$，范围与原积分收敛恰好吻合。于是

$$I_p=\frac{2\pi ie^{i\pi p}}{1-e^{2\pi ip}}=\boxed{-\frac{\pi}{\sin\pi p}}.$$

化简使用 $1-e^{2i\alpha}=-2ie^{i\alpha}\sin\alpha$。在 $-1<p<0$ 内正弦为负，最终答案为正，与原被积函数正值一致，是很好的符号检查。

把 $p=s-1$ 换记，可得常用形式 $\int_0^\infty x^{s-1}/(1+x)dx=\pi/\sin\pi s$，$0<s<1$。这不是两个互相矛盾的公式，而是指数参数相差1。

5.2.6 · 教材127—132页，原书带星号

30 含 log 的钥匙孔为什么有时要平方 log

若整圈钥匙孔用 $L(z)R(z)$，上下岸差为 $-2\pi i R(x)$，会把目标中的 $\ln x$ 消掉，只留下不带对数的积分。要提取 $\int R(x)\ln x\,dx$，可改用 $L(z)^2R(z)$，因为

$$L_{\text{upper}}^2-L_{\text{lower}}^2=(\ln x)^2-(\ln x+2\pi i)^2=-4\pi i\ln x+4\pi^2.$$

所以两岸和为 $-4\pi i\int R\ln x+4\pi^2\int R$。原书在例9后提示用这个方法再算例8，正是这个原因。

这一星号小节学到什么程度 至少会写分支、上下岸取值、反向符号和大、小弧条件。复杂对数高阶留数可第二轮再练；如果本课程考试覆盖星号内容，就必须能独立重算例8、例9及对应检查题。它有明确的做题用途，不是只为抽象扩充概念。

第五章 / 5.3

辐角原理与儒歇定理

教材132—138页上部

5.3 · 教材132—138页上部

31 对数导数为什么会自动数重数

若 a 是 f 的 m 阶零点，局部写 $f=(z-a)^m h$、$h(a)\neq0$。不用真的选全域对数，直接求导相除：

$$\frac{f'}{f}=\frac{m}{z-a}+\frac{h'}{h}.$$

后一项在 a 附近解析，所以 f'/f 在这里有一阶极点，留数为 m。若 b 是 f 的 n 阶极点，写 $f=(z-b)^{-n}h$，同样得到留数 $-n$。

所以 f'/f 记录的是**零点给正的重数，极点给负的阶数**。零点虽然可能三重、四重，在对数导数中都变成一阶极点，但留数分别是3、4，信息没有丢失。

5.3 · 教材132—138页上部

32 辐角原理的积分版本：得到的是 N-P

设 f 在 C 内部亚纯，也就是除孤立极点外解析，并且在边界 C 上没有零点、也没有极点。对正向简单闭曲线，

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P,}$$

其中 N 是内部零点总重数，P 是内部极点总阶数。它直接由上一单元的留数和得到。

三个边界条件 边界不能有零点，否则 f'/f 在路径上失去定义；边界不能有极点；内部不能有未处理的本性奇点，因为此处定理建立在亚纯函数的零、极点结构上。若题目只给出一个积分值，你得到的是 $N-P$，除非已知没有极点，不能立刻把它称为零点数。

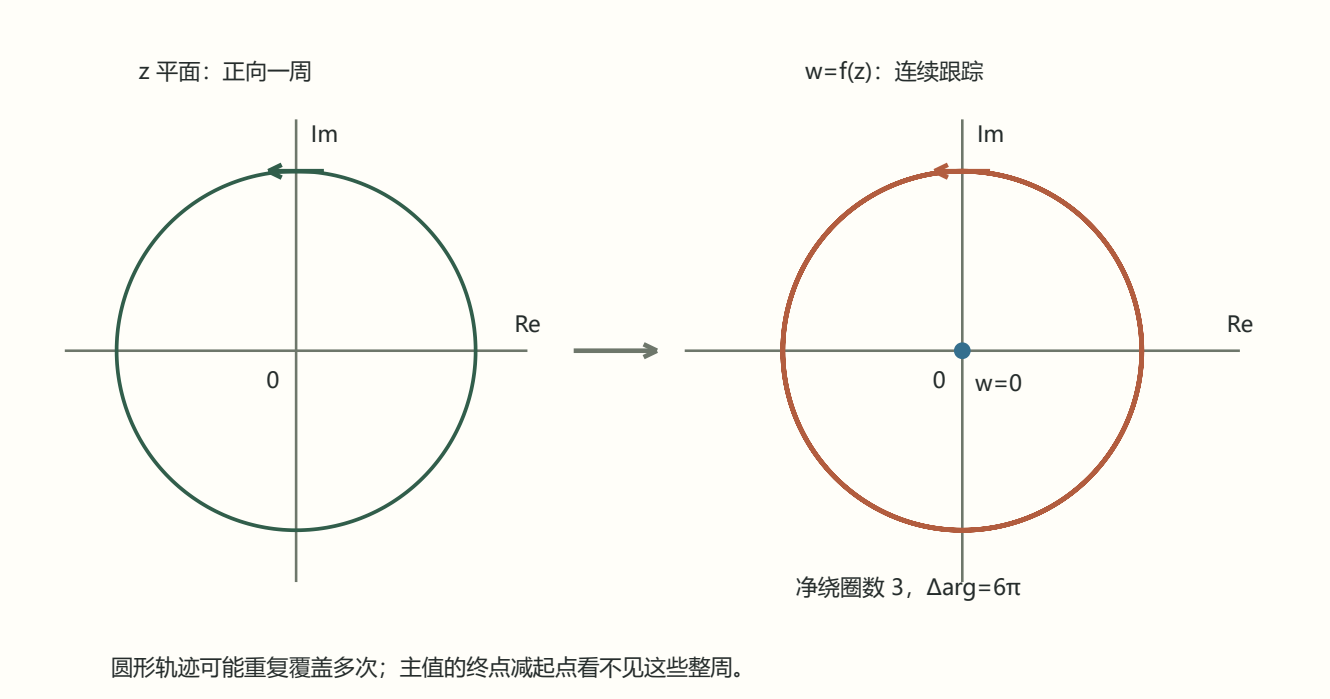
5.3 · 教材132—138页上部

33 几何版本：连续跟踪像曲线绕原点多少圈

当 z 沿 C 逆时针走一周，$w = f(z)$ 在另一张平面画出闭曲线，可能自交、也可能绕多圈，但不能穿原点。沿这条曲线连续跟踪辐角，记总变化为 $\Delta_C \arg f$，则

$$\boxed{\Delta_C \arg f = 2\pi(N - P).}$$

图 5-10 连续辐角记录净绕圈数，不能只看主值终点



图示 f(z)=z³：正向3圈；零点总重数减极点总阶数为 3；连续辐角变化为 6π。

不是终点主值减起点主值 起点、终点是同一个数，主辐角差当然为0；但连续跟踪的角度可以增加 6π。例如 $f(z)=z^3$，单位圆在像平面绕原点三周，$\Delta \arg f = 6\pi$；$f(z)=1/z^2$ 则顺时针两周，变化为 -4π。

教材的几何推导是 $dw/w = d\rho/\rho + i\,d\theta$。整圈 ρ 回到原值，$\int d\rho/\rho = 0$，剩下的就是 $i\Delta\theta$。要会解释这个图像，不必把复杂自交像曲线的每一段角度都手工测出来。

5.3 · 教材132—138页上部

34 教材例子：三角分母的零点位置也要列全

取

$$f(z)=\frac{(z^2+1)(z-4)}{\sin^4 z},\qquad C:|z|=3.$$

内部零点为 $\pm i$，均一重；$z=4$ 在外。$\sin z$ 的全部零点为 $k\pi$，在半径3内只有0，故分母使0成为四阶极点，分子在那里非零。于是 $N=2, P=4$，得到

$$\Delta_C \arg f = 2\pi(2-4) = -4\pi.$$

边界上既没有这几个零点，也没有 $k\pi$，所以可用定理。此题不是求 f 的留数，而是先把零点、极点数清楚，再求像曲线的净绕圈数。

5.3 · 教材132—138页上部

35 儒歇定理：边界上一个部分严格压住另一个部分

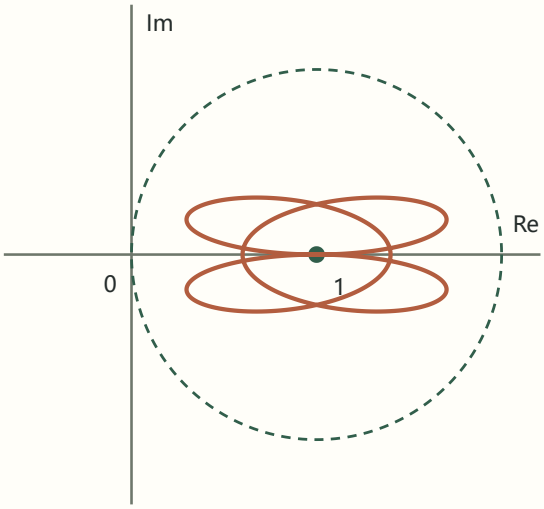
若 g, h 在 C 及内部解析，且边界上处处满足

$$|h(z)| < |g(z)|,$$

则 $g+h$ 与 g 在内部有相同的零点总重数。把复杂函数分成“容易数根的主项”和“小扰动”，就能不求出具体根而数清根数。

证明可以看连续变形 $g+th$（$0 \le t \le 1$）：边界上 $|g+th| \ge |g| - |h| > 0$，零点不会穿过边界，所以数目保持不变。按教材的辐角证明，$1 + h/g$ 始终在圆 $|w-1| < 1$ 里，绕原点净圈数为0，因此 $g+h$ 与 g 的辐角增量相同。

图 5-11 儒歇定理的边界比较与零点总重数



|g| = 5

|h| ≤ 4 < 5

故 |h/g| < 1

内部零点总重数 = 3

像曲线 1+h/g 留在以1为中心的开单位圆内，不能绕过原点。

图示 $z^6-z^4-5z^3+2$，单位圆；主项 $-5z^3$；按重数计，共 3 个内部零点。

用在哪，验证在哪 不等式只要求在边界，不必在整个内部成立；但两个函数的解析性要覆盖边界和内部。通常版要求严格小于，若只证出 $\le$，不能直接交卷，需进一步排除等号或换拆法。主项不一定是最高次幂：小圆上常数项或低次幂也可能更大。

5.3 · 教材132—138页上部

36 教材例1：单位圆上 $-5z^3$ 压住所有其他项

求 $P = z^6 - z^4 - 5z^3 + 2$ 在 $|z| < 1$ 的零点数。选 $g = -5z^3$，$h = z^6 - z^4 + 2$。在 $|z| = 1$ 上

$$|g| = 5, \qquad |h| \le 1 + 1 + 2 = 4 < 5.$$

因此 P 与 $-5z^3$ 有相同的内部零点总重数，为3。这里不是说 P 在原点有三重根；事实上 $P(0) = 2$。结论只是它在圆内共有3个根，按重数计。

圆环题要两次计数再相减 对 $z^4 + 6z + 1$，在 $|z| = 1/2$ 上 $6z$ 的模为3，其他两项总模至多 $1 + 1/16 < 3$，故小圆内1根。在 $|z| = 2$ 上 z^4 的模16，大于 $12 + 1$，故大圆内4根。两个边界均无根，因此圆环 $1/2 < |z| < 2$ 内有3根。这与原书习题10对应。

5.3 · 教材132—138页上部

37 教材例2：代数基本定理在这里证明的用途

对 $P = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$，$a_0 \neq 0$，在足够大的圆上，低次项之和除以 $a_0 z^n$ 一致趋零，所以最终有 $|\text{低次项}| < |a_0 z^n|$。儒歇定理给大圆内恰有 n 个零点，按重数计。

还应说明大圆外没有漏根：同一个“首项大于其余项”的估计对所有足够大 $|z|$ 都成立，故大圆外 P 不为零。于是全复平面总共有 n 个根。这说明以前用过的多项式根数结论可由复分析统一推出。

需要熟背吗 若考试不考定理证明，第一轮能说清“大圆上最高次项压住其余项”即可；具体数根题的选主项、估计和重数才是优先训练内容。保留证明是为了说明儒歇定理不只是计算技巧，也能建立全局结论。

第五章 / 5.4

原书习题路线、检查题与速查

原书习题138—141页

5.4 · 原书习题138—141页

38 一张表决定先补哪一块

题型	原书题号	应先会的方法	第一轮完成标准
求有限点留数	1	判阶、极限、求导、短展开	算出目标系数，避免全展开
无穷远留数	2	$z = 1/w$ 与微分因子	记住额外负号及总和关系
复闭路积分	3	列奇点、画区域、算内部留数和	点在内外线上均分清
三角有理积分	4	单位圆代换、区间倍数	$dz/(iz)$ 不漏
有理实积分	5	次数差、大弧、奇偶性	收敛范围与半轴系数正确
含正弦余弦	6	指数辅助函数、约当、小弧	不直接用增长的 cos z 闭合
特殊围道	7	四分之一圆、矩形等	辅助边逐段说明

题型	原书题号	应先会的方法	第一轮完成标准
分支与对数，带星号	8	切口、上下岸、相位	先定分支再算留数
数根与根的分布	9—10	儒歇、圆环相减	边界严格不等式，计重数

建议第一轮按$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 9$学习，每类先做两道代表小题，再回头完成其他小题。第二轮补2、7、8和10的较长证明。特殊围道不是盲猜：它们都在利用指数衰减、平移关系或分支跳跃。下面20道是自编检查题，编号与原书分开；其中会复用关键模板检验你是否能独立完成。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习1 一阶、高阶与可去点要先判清

求 $f(z)=\cos z/(z-i)$ 在 i 的留数；求 $g(z)=e^z/z^3$ 在0的留数；求 $h(z)=\sin z/z$ 在0的留数。

展开解析：三种结构对应三种动作

第一问为一阶极点，留数 $\cos i=\cosh 1$。第二问为三阶极点，留数为 $(e^z)''|_0/2!=1/2$。第三问原式在0可去，延拓后 $1-z^2/6+\cdots$ 没有负幂，留数为0。不要把分母有 z 就一律判作极点。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习2 二阶极点也可能留数为零

求 $f=z/(z^2+1)^2$ 在 i 的奇点阶数与留数。

展开解析：阶数取决于最强负幂，留数只取负一次项

分子在 i 非零，故为二阶极点。消因子后 $h=z/(z+i)^2$，$h'=1/(z+i)^2-2z/(z+i)^3$，代 $z=i$ 得 $-1/4+1/4=0$。所以留数为0，但二阶主部并未消失。这也解释全轴奇函数 $x/(x^2+1)^2$ 的收敛积分为0，与留数法一致。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习3 本性奇点只取一项

求 $f=ze^{1/z}$ 在0的留数，以及沿单位圆逆时针的积分。

展开解析：先判断需要指数展开的哪一项

$e^{1/z}=1+z^{-1}+z^{-2}/2!+\cdots$。乘 z 后，只有原来的 $z^{-2}/2$ 变成 $z^{-1}/2$。所以留数 $1/2$，闭路积分 πi。不必写完无穷多个负幂，也不能用有限阶极点的求导公式代替定义。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习4 围道内、外、线上分别处理

计算 $\oint_{|z|=r} dz/[(z-1)(z-3)]$，分别取 $r=2,4,1$，均为逆时针。

展开解析：先画出两个候选点

在1的留数为 $1/(1-3)=-1/2$，在3的留数为 $1/(3-1)=1/2$。$r=2$ 只包围1，结果 $-\pi i$；$r=4$ 两点都包围，和为0，结果0；$r=1$ 时点1落在路径上，普通闭路积分无定义，不能直接套定理。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习5 单位圆代换中的 1/(iz)

求 $a>1$ 时 $\int_0^{2\pi} d\theta/(a+\cos\theta)$。

展开解析：两根中只有一根在单位圆内

代换得 $\oint 2\,dz/[i(z^2+2az+1)]$。两根为 $\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}$、$\beta=-a-\sqrt{a^2-1}$，满足 $|\alpha|<1<|\beta|$。内部留数为 $2/[i(\alpha-\beta)]=1/[i\sqrt{a^2-1}]$，故答案 $2\pi/\sqrt{a^2-1}$。结果为正，且 a 很大时近似 $2\pi/a$，可由原式核验。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习6 半轴有理积分与两个上方极点

求 $\int_0^{\infty} dx/(x^4+1)$。

展开解析：先扩成全轴再除2

上方两根为 $a=e^{i\pi/4}$、$b=e^{3i\pi/4}$，均为一阶极点，各留数 $1/(4a^3)$、$1/(4b^3)$。其和为 $-i/(2\sqrt{2})$，全轴积分为 $2\pi i$ 乘此和，即 $\pi/\sqrt{2}$。原函数偶，半轴答案 $\pi/(2\sqrt{2})$。大弧量级 $T/T^4\to 0$。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习7 余弦的参数正负与半轴系数

求 $a>0, b\in\mathbb{R}$ 时 $\int_0^\infty \cos(bx)/(x^2+a^2)dx$。

展开解析：先做 b>0，其他情形单独说明

$b>0$ 时上半平面的一阶留数为 $e^{-ab}/(2ia)$，全轴复积分 $\pi e^{-ab}/a$，半轴余弦积分为 $\pi e^{-ab}/(2a)$。$b<0$ 由余弦对参数偶性替换为 $|b|$；$b=0$ 由有理积分直接算为 $\pi/(2a)$。统一结果为 $\pi e^{-a|b|}/(2a)$。不应把负参数仍闭上半平面而不检查增长。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习8 含 1/x 的正弦积分可以拆成两个已知模板

求 $a>0, b>0$ 时 $\int_0^\infty \sin(bx)/[x(x^2+a^2)]dx$。

展开解析：拆分后各自都收敛

利用 $1/[x(x^2+a^2)]=a^{-2}[1/x - x/(x^2+a^2)]$。两项分别由狄利克雷积分与本章的 $x\sin$ 模板得到 $\pi/2$、$\pi e^{-ab}/2$。答案为 $\pi(1-e^{-ab})/(2a^2)$。两项在0都因正弦因子变得可积，尾部也收敛，所以这次拆分合法；不能对一般发散项随便分开积分。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习9 sinc 的三次方：参考原书习题6的辅助函数

求 $\int_0^\infty (\sin x/x)^3 dx$。提示取 $F=(e^{3iz}-3e^{iz}+2)/z^3$。

展开解析：常数与一次项被消掉，留下简单极点

分子展开为 $-3z^2-4iz^3+\cdots$，所以 $F=-3/z-4i+\cdots$，留数为 -3。上方挖小半圆，内部无极点，小弧积分趋于 $3\pi i$；大弧所有项都消失，故实轴复辅助积分的主值为 $-3\pi i$。取虚部，利用 $\sin 3x-3\sin x=-4\sin^3 x$，得全轴 sinc 三次方积分为 $3\pi/4$。它是偶函数，半轴答案 $3\pi/8$。虚部在0可补连续，原目标为普通收敛积分；实部的 $-3/x$ 才需要主值。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习10 一个主值为零但普通积分不存在的例子

判断 $\int_{-\infty}^{\infty} dx/[x(x^2+1)]$ 是否存在，并求其对称柯西主值。

展开解析：问题发生在0，不是无穷端

无穷端像 $1/x^3$ 可积；0附近像 $1/x$，两侧普通积分分别对数发散，因此普通广义积分不存在。对称删除 $(-\varepsilon,\varepsilon)$，再作对称无穷截断时，被积函数为奇函数，主值为0。这个0不能写成普通广义积分的值。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习11 对数积分也可以用实代换交叉核验

求 $\int_0^{\infty}\ln x/(1+x^2)dx$，并说明收敛性。

展开解析：倒数代换把积分变成相反数

0附近 $|\ln x|$ 可积，无穷端 $(\ln x)/x^2$ 可积，故绝对收敛。令 $x=1/t$，积分变成 $-\int_0^{\infty}\ln t/(1+t^2)dt=-I$，所以 $I=0$。复方法选上半圆对数分支也可算出同一值。原书例8的分母是平方，结果 $-\pi/4$，不能把两个分母混为一谈。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习12 钥匙孔模板的基本值

求 $\int_0^{\infty} dx/[\sqrt{x}(1+x)]$，说明选用的参数范围。

展开解析：指数 p=-1/2 在允许范围内

这是 I_p，$p=-1/2\in(-1,0)$，小、大弧均消失。取本节 $0<\arg z<2\pi$，在 -1 的留数为 $e^{-i\pi/2}=-i$；两岸因子 $1-e^{-i\pi}=2$，故 $2I=2\pi i(-i)=2\pi$，答案为 π。也可代 $x=t^2$ 得 $2\int_0^\infty dt/(1+t^2)=\pi$ 核验。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习13 不同分母先试一个实代换

求 $\int_0^\infty dx/[\sqrt{x}(1+x^2)]$。

展开解析：变为已经推导过的幂积分

令 $t=x^2$，有 $x^{-1/2}dx=\frac{1}{2}t^{-3/4}dt$，所以原积分是 $I_{-3/4}/2$。代入 $-\pi/\sin(-3\pi/4)$，得答案 $\pi/\sqrt{2}$。如果直接用钥匙孔也可，但需把 $i,-i$ 都算入留数和，且 $(-i)^{-1/2}$ 的角应取 $3\pi/2$；这正是跨半平面时容易混用主值的地方。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习14 辐角原理不能忘掉极点数

对 $f=(z-1/3)^3(z+2)/(z-1/2)^2$，求沿单位圆逆时针一周的辐角变化与 $\oint f'/f\,dz$。

展开解析：按重数相加再相减

内部三重零点在 $1/3$，点 -2 在外；内部二阶极点在 $1/2$。故 $N-P=3-2=1$。辐角变化为 2π，对数导数积分为 $2\pi i$。边界上无零、极点，条件满足。若回答零点数3，尚未回答题目所问的净变化。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习15 小圆上低次幂也能作为主项

求 $P=z^5+4z^2+1$ 在 $|z|<1$ 内的根数。

展开解析：不必执着于最高次项

在单位圆，$|4z^2|=4$，而 $|z^5+1|\le 2<4$。所以与 $4z^2$ 有相同内部零点总重数，为2。这里两个根未必相同，也不位于0；儒歇只保留数目，不保留位置。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习16 圆环数根要数两次

求 z^4+6z+1 在 $1/2<|z|<2$ 内的根数，写出两条边界估计。

展开解析：小圆1根，大圆4根

小圆上 $|6z|=3>1+(1/2)^4=17/16$，小圆内1根；大圆上 $|z^4|=16>6\cdot 2+1=13$，大圆内4根。两处都是严格不等式，保证边界无根，故圆环内为 $4-1=3$ 根，按重数计。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习17 超越方程也能用儒歇定理

求 $e^z-3z^n=0$ 在 $|z|<1$ 内的根数，其中 n 为正整数。

展开解析：边界上指数由实部控制

在 $|z|=1$ 上 $|e^z|=e^{\mathrm{Re}\,z}\le e<3=|3z^n|$。两项整，故与 $-3z^n$ 有同样的内部零点总重数，为 n。不要求求出这些根的显式表达式，也不要求证明它们都是单根。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习18 无穷远留数的负号

求 $e^{1/z}$ 与 z^2 在无穷远点的留数。

展开解析：先在大 z 展开，负一次项再变号

$e^{1/z}=1+1/z+1/(2z^2)+\cdots$，故无穷远留数为 -1。z^2 没有 z^{-1} 项，无穷远留数为0。也可用 $-\mathrm{Res}[f(1/w)/w^2,0]$ 核验。前者在无穷远是可去点，却仍可有非零的无穷远留数，因为此处留数属于微分 $f(z)dz$ 的变换，不能把有限点“可去则留数0”直接搬过来。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习19 菲涅耳积分的尺度变化

求 $\int_0^{\infty}\cos(3x^2)\,dx$。

展开解析：不用重做围道

令 $u=\sqrt{3}x$，积分为 $1/\sqrt{3}$ 乘标准菲涅耳积分 $\sqrt{\pi/8}$，所以答案 $\sqrt{\pi/24}$。一般正参数 c 的结果为 $\sqrt{\pi/(8c)}$。注意微分带来 $1/\sqrt{c}$，不是 $1/c$。

5.4 · 原书习题138—141页 · 自编检查题

练习20 高斯余弦积分的参数检查

求 $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 4x\,dx$，并与不带余弦的积分比较。

展开解析：a=1，b=4

由矩形围道公式，答案为 $(\sqrt{\pi}/2)e^{-4}$。不带余弦时为 $\sqrt{\pi}/2$，振荡后的有符号积分变小，与指数因子一致。结果为正是这个特定高斯变换的性质，不能推广为“任何正权乘余弦的积分都非负”。

5.4 · 原书习题138—141页

39 一页速查：每个公式旁边都放上条件

任务	核心式	最容易漏的条件
一阶留数	$\lim(z-a)f$ 或 $P(a)/Q'(a)$	分母简单零点；先看分子抵消
m阶极点留数	$h^{(m-1)}(a)/(m-1)!$	$h=(z-a)^m f$ 在 a 解析
复闭路积分	$2\pi i\sum \mathrm{Res}$	正向、点在内部、路径无奇点
上半平面实积分	目标段加大弧	收敛；大弧统一估计
指数型半圆	e^{imz} 在上方衰减	$m>0$，约当条件；下方变方向
绕过简单极点的小弧	$i(\beta-\alpha)\,\mathrm{Res}$	参数角和方向；高阶另算
钥匙孔	$(1-e^{2\pi ip})I$	单值分支、两岸方向、两弧消失
辐角原理	$N-P=\Delta\arg f/(2\pi)$	边界无零极点，按重数计
儒歇	$\lvert h\rvert<\lvert g\rvert$ 只查边界	g、h 内外邻域解析；不等式严格

本章真正要练成的习惯 每一次写积分结果前，都能指出它来自哪一条完整围道等式；每一次数根前，都能指出主项为什么压住其余项。对数分支、实轴主值与无穷远留数是三处容易因简写混淆的地方，本讲义已将约定和微分因子明确写出。对第133页证明中极点对应的留数，统一采用 $-n$，与定理和最终 $N-P$ 一致。

完成前8题和14—17题，说明留数、基本实积分与数根已经过关；9—13题检查特殊围道和分支，18—20题检查拓展与参数变化。若尚未做对，不需要重新背整章，直接按习题表回到对应的计算单元。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本第五章整理；正文印刷页108—138上部，章末习题138—141。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。第五章含20道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月15日。