数学物理方法 / 复变函数

第三章学习讲义

解析函数的积分表示

参数积分 → 柯西定理与公式 → 原函数 → 调和与平面场。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材48—77页　12道自编检查题　离线SVG公式与图解

对应教材印刷第48—77页，正文第48—73页，习题第74—77页。本章最重要的进步是：原来需要沿路径逐段积分的题，在检查解析性与内部点后，经常能直接变成一个函数值或导数值。后半章把解析函数接到调和函数和物理场，说明这些数学条件为什么有用。

学完的标准 能对复积分选方法，写正确的路径方向，使用柯西积分定理和积分公式，找原函数，补共轭调和函数，按本书符号把复势转成场强。第一轮计算核心是3.1、3.2、3.3和3.5；3.4解释路径无关，3.6解释物理用途，也配题学会基本计算。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

3.1 复变函数的积分	教材48—53页
3.2 柯西积分定理	教材54—57页
3.3 柯西积分公式	教材57—61页
3.4 原函数	教材62—64页
3.5 解析函数与调和函数的关系	教材64—68页
3.6 平面场	教材68—73页
3.7 习题路线与检查题	原书习题74—77页

第三章 / 3.1

复变函数的积分

教材48—53页

3.1 · 教材48—53页

01 复积分加的是有向小位移

把曲线 C 切成小段，在每段上取点 ζ_k，加总 $f(\zeta_k)\Delta z_k$，分段越来越细，极限就是 $\int_C f(z)\,dz$。与第一类曲线积分 $\int_C f\,ds$ 的区别在于：dz 带复方向，ds 只带正长度。

若 $f=u+iv$、$dz=dx+i\,dy$，相乘得到

$$\int_C f\,dz=\int_C (u\,dx-v\,dy)+i\int_C (v\,dx+u\,dy).$$

你无需死记四项的排列；每次把 $(u+iv)(dx+i\,dy)$ 展开即可。函数沿分段光滑曲线连续，就足以保证这个积分存在，**不要求解析**。非解析只会影响后面能否用更快的定理。

把黎曼和定义写在这里，是为了说明方向、线性和估计式从哪里来。第一轮做题应能解释这个意思，不必把每一个极限细节都重证一遍。

3.1 · 教材48—53页

02 最通用算法：参数化后记得乘上导数

若 $z=z(t)$、$a\le t\le b$，则

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt.}$$

这是可以处理共轭、模、分段函数的稳妥算法。常见曲线：线段 $z=A+t(B-A)$；圆弧 $z=a+Re^{it}$。圆弧的 $dz=iRe^{it}dt$，不能漏掉 i、R 或指数。

例题 沿单位圆逆时针计算 $\oint_C \bar z\,dz$。取 $z=e^{it}$、$\bar z=e^{-it}$、$dz=ie^{it}dt$，所以

$$\oint_C \bar z\,dz=\int_0^{2\pi} i\,dt=2\pi i.$$

曲线闭合不代表积分为零；$\bar z$ 在第二章已证明处处不解析。

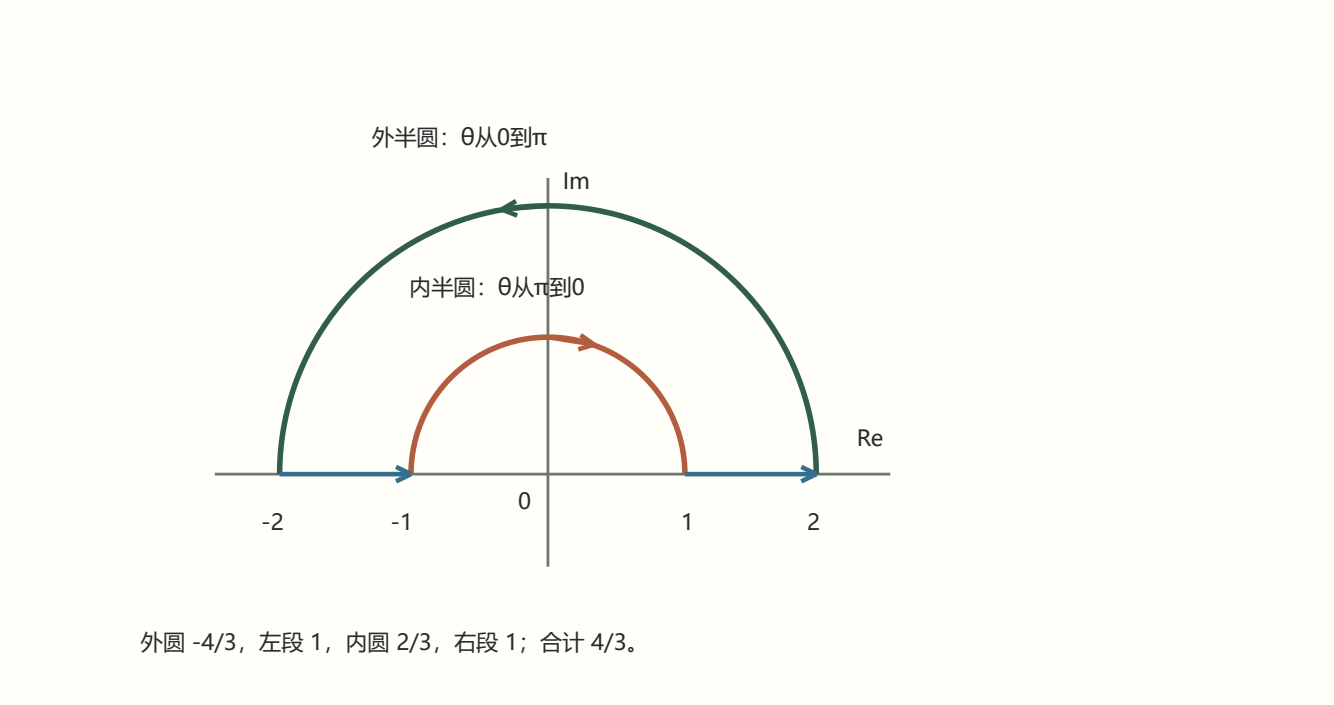
线性与拼接 积分对函数线性，对按顺序连接的曲线可逐段相加，反向曲线 C^- 的积分变号。这些性质使复杂边界可以拆成几条线段和圆弧。

3.1 · 教材48—53页

03 教材半圆环例题：四段分别代入

教材取上半圆环 $1<|z|<2$ 的正向边界，求 $I=\oint_C (z/\bar z)\,dz$。它由外半圆、左线段、内半圆、右线段依次组成。

图 3-1 半圆环的正向边界：区域始终在左侧



外圆 -4/3，左段 1，内圆 2/3，右段 1；合计 4/3。

四段方向按连续行走的起点、终点确定，内圆方向与外圆相反。

外圆 $z=2e^{it}$、$t:0\to\pi$，被积式乘 dz 为 $2ie^{3it}dt$，积分为 $-4/3$。左线段从 -2 到 -1，$z/\bar z=1$，积分为1。内圆必须顺时针，$z=e^{it}$、$t:\pi\to 0$，积分为 $2/3$。右线段从1到2，积分为1。因此

$$I=-\frac{4}{3}+1+\frac{2}{3}+1=\frac{4}{3}.$$

这题没有用到柯西定理。真正要练的是把“区域正向”落实为每一段的起终点，尤其内圆不能和外圆取同一个方向。

3.1 · 教材48—53页

04 一个必须记住的基础圆周积分

对逆时针圆周 $|z-a|=R$，整数 n 满足

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\neq 1.\end{cases}$$

推导只有一次参数化：$z-a=Re^{it}$，积分变成 $iR^{1-n}\int_0^{2\pi}e^{i(1-n)t}dt$。当 $n=1$，指数恒为1；其余整数给完整周期，积分抵消。

这里的零不能乱解释 $n=2$ 时函数在内部不解析，但积分仍为零；因此“积分为零”不能反推“内部没有奇点”。$n=1$ 的 $2\pi i$ 则是柯西积分公式和第四章罗朗系数提取的根基。

3.1 · 教材48—53页

05 长大不等式：最大模乘路径长度

若曲线长为 L，且曲线上 $|f(z)|\le M$，则

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C|f(z)|\,ds\le ML.$$

“长大”就是长度与最大值相乘。用黎曼和的三角不等式即可得到。它估计的是积分的模，不是直接比较一个复数与实数大小。

例题 在 $|z|=3$ 上估计 $\oint dz/(z-1)^2$。由 $|z-1|\ge 2$，得 $M\le 1/4$；长度为 6π，故积分模不超过 $3\pi/2$。实际积分可能更小，甚至为零；上界不要求精确达到。

统一的三步 明确曲线长度；给分母下界、分子上界；相乘。大圆弧消失需要 $M(R)L(R)\to 0$，仅有 $M(R)\to 0$ 不够。例如长度与 R 同阶时，$M(R)=1/R$ 只能保证有界。

3.1 · 教材48—53页

06 小圆弧极限：半圈为什么常出现半个系数

设 $(z-a)f(z)\to k$，沿 $z=a+\rho e^{it}$、$t:\alpha\to\beta$，当 $\rho\to 0$，则

$$\int_{C_\rho}f(z)\,dz\longrightarrow i(\beta-\alpha)k.$$

证明先拆为 $k/(z-a)$ 与余项。前者精确积分为 $i(\beta-\alpha)k$；后者在小圆弧上模不超过 ε/ρ，乘长度 $\rho|\beta-\alpha|$ 后趋零。这是教材例3的逻辑。

掌握边界 要会判断角度跨度和方向。逆时针半圆给 $i\pi k$，顺时针半圆给 $-i\pi k$。第一轮不用背证明中的每个 ε，但必须知道这是有条件的小弧极限，不是把路径上奇点的积分直接赋一个“半值”。

第三章 / 3.2

柯西积分定理

教材54—57页

3.2 · 教材54—57页

07 积分为零需要一整片解析区域

若 C 是正向简单闭曲线，f 在曲线及其内部的某个开邻域内解析，则

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0.}$$

教材“在闭域上解析”的意思，就是存在包含该闭域的开集，函数在其中解析。更常见的课堂版本：f 在单连通域 D 内解析，C 完全在 D 内闭合，则积分为零。

做题前逐项检查 曲线是否闭合；函数是否单值；曲线上有没有未定义点；内部有没有奇点或未被包含的洞。只知道“曲线上解析”不够，$1/z$ 在单位圆附近解析，却有积分 $2\pi i$。

证明的用途 在偏导足够连续的情况下，用格林公式得到

$$\oint_C f\,dz = \iint_D (-v_x - u_y)\,dA + i\iint_D (u_x - v_y)\,dA.$$

C-R 使两个被积式为零。教材采用这条便于理解的证明路线；一般柯西定理不需要预先另加导数连续条件。第一轮要会复述“格林把边界积分变成内部偏导，C-R 把它们消掉”，完整的一般性证明可留后续理论课。

3.2 · 教材54—57页

08 多连通域：外圈减内圈，不是每一圈都零

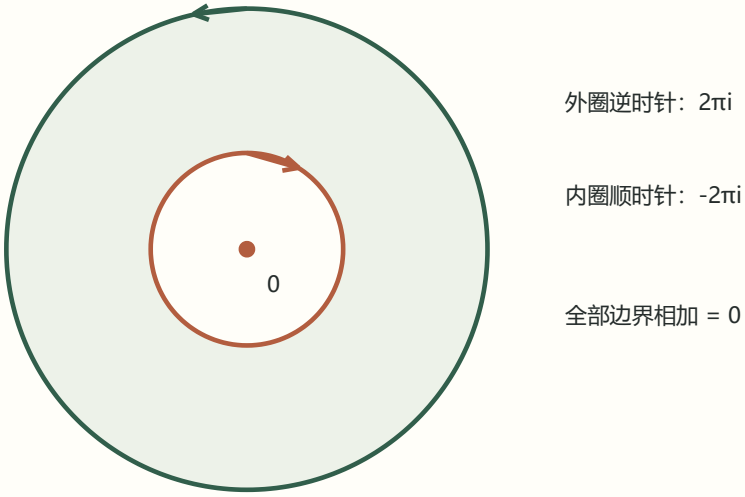
区域正向的统一规则是：**沿边界走时，区域留在左手边。** 因而外边界逆时针，内边界顺时针。若 f 在这些边界及中间区域解析，则

$$\oint_{\partial D} f\,dz = 0.$$

若把外圈 C_0 与每个内圈 $C_1, \dots, C_m$ 都另按逆时针记号书写，那么

$$\oint_{C_0} f\,dz = \sum_{j=1}^{m} \oint_{C_j} f\,dz.$$

图 3-2 有孔区域的边界方向与积分抵消



例：f(z)=1/z；曲线间解析，洞内的缺点不能当成区域的一部分。

沿边界前进时，带颜色的区域始终留在左手边。

证明可在圆环上割一条连接内外边界的线，把区域剪成单连通；割线来回各走一次、方向相反，积分抵消，只留下外圈和内圈。保留这段证明，是为了让你记住内边界符号，不要求背复杂图形的编号。

关键例子 $f=1/z$ 在圆环 $1<|z|<2$ 解析，外圈逆时针积分 $2\pi i$，内圈顺时针积分 $-2\pi i$，整个边界积分才为零。圆环内处处解析，并不意味着只沿外圈就能套“单连通版本”。

3.2 · 教材54—57页

09 变形路径与路径无关的真正条件

若两条闭曲线包围同一个缺点，且它们之间没有新的奇点，可用多连通定理把一条变成另一条。因此 $\oint dz/(z-a)$ 对包围 a 一周的任意正向简单闭曲线仍为 $2\pi i$，不一定非要圆。

若 f 在单连通域解析，两条连接同一起终点的路径合成一条闭曲线，所以两条积分相等。这就是路径无关。你可以换成更好算的线段或折线，但新路径也必须留在允许区域内。

不要过度使用单连通 单连通是保证所有解析函数都路径无关的方便充分条件。有些函数在多连通域上也有全局原函数，例如 $1/z^2$ 在去心平面有原函数 $-1/z$；它仍然路径无关。反例 $1/z$ 才是不能在去心平面直接套牛顿—莱布尼茨的典型。

第三章 / 3.3

柯西积分公式

教材57—61页

3.3 · 教材57—61页

10 从积分为零，前进一步到提取函数值

若 f 在正向简单闭曲线 C 及其内部解析，a 位于内部，则

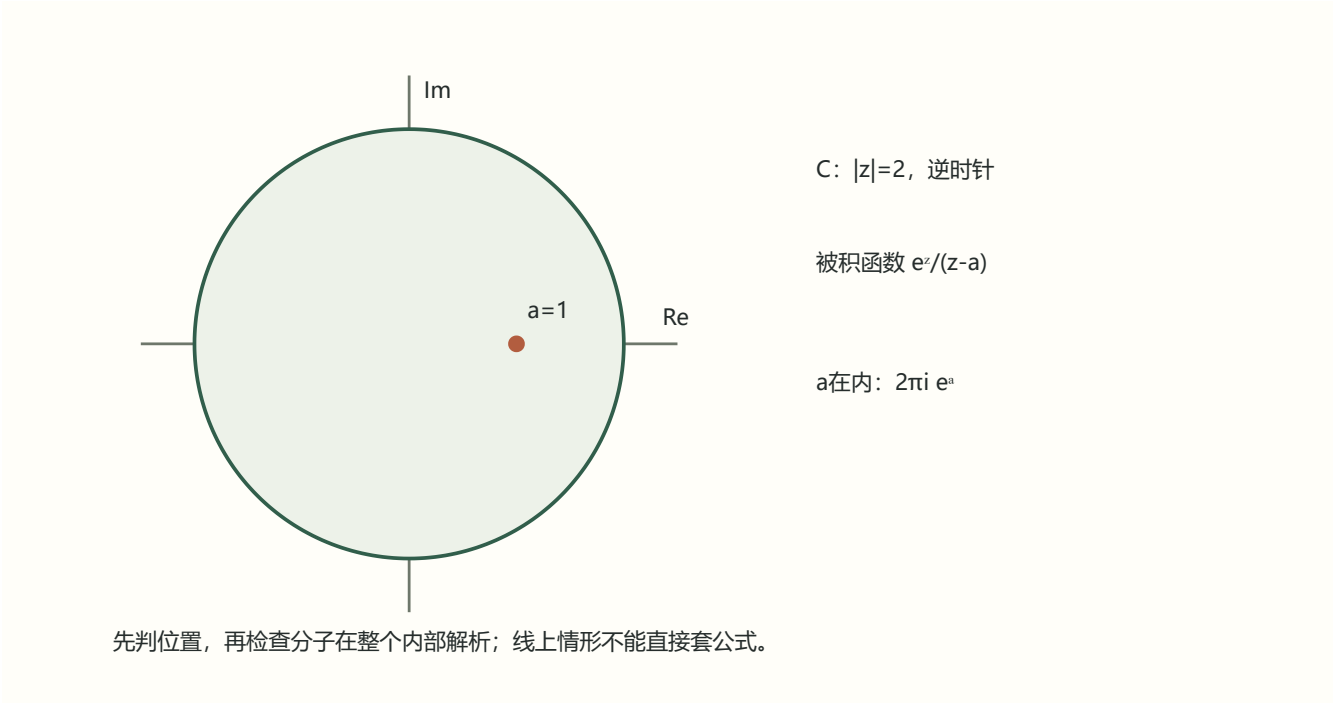
$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

实际计算常用反写：

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz=2\pi i f(a).}$$

分母中的 a 必须在内部，且分子 f 要在整片内部解析。如果 a 在外部且整个被积函数解析，积分为零；如果 a 正在路径上，普通曲线积分通常无定义，不能把结果想成内外的一半。

图 3-3 柯西公式先判断分母点在内、在外还是线上



图示 a=1：在圆内；使用柯西积分公式。

完整例题 $C:|z|=2$ 逆时针，求 $\oint_C e^z/(z-1)\,dz$。分子 e^z 整，点1在内部，故结果 $2\pi i e$。若半径改为 $1/2$，点1在外部，结果0；改为1则奇点落在路径上，不能套用。

3.3 · 教材57—61页

11 柯西公式的证明主线与平均值

在 a 周围挖一个半径 ρ 的小圆。大曲线积分等于小圆积分。把小圆上的分子拆成 $f(a)+[f(z)-f(a)]$：常数部分积分为 $2\pi i f(a)$；误差部分由连续性与长大不等式控制，模不超过 $2\pi\varepsilon$，所以趋零。

这段证明连接了本章所有基础：挖洞变形、基础圆周积分、连续性和长大不等式。**你需要知道为什么误差里分母 ρ 不导致爆炸**：圆周长也含 ρ，两者抵消。

若取圆周 $z=a+Re^{it}$，公式变为

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,dt.$$

解析函数在圆心的值等于圆周平均值。取实部或虚部，得到相应调和函数的平均值性质。它可证明某些边界值不可能由解析函数产生，也能把实三角积分转成复积分。

3.3 · 教材57—61页

12 高阶公式：分母次数减一是求导阶数

同样条件下，f 具有任意阶导数，而且

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

计算时反写为

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^m}\,dz=\frac{2\pi i}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a),\quad m\ge 1.}$$

最常见失误 把三次分母配成三阶导；实际上 $(z-a)^3$ 配二阶导，还要除以 $2!$。

例如 $C:|z|=2$,

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz=\pi i(-\cos i)=-\pi i\cosh 1.$$

对多项式也一样：若导数阶数超过多项式次数，就直接为零。高次分母不自动意味着非零结果。

3.3 · 教材57—61页

13 多个分母点：先判内外，再拆分或挖小圈

若 $e^z/[z(z-2i)]$，不能不看 $z=0$ 就把 e^z/z 当成整片内部的解析分子。教材例1取 $C:|z-3i|=r$，$2<r<3$：到0的距离3，故0在外；到 i 的距离2，到 $2i$ 的距离1，故后二者在内。

于是

$$\oint_C\left[\frac{e^z}{z(z-2i)}+\frac{\cos z}{(z-i)^3}\right]dz=2\pi i\frac{e^{2i}}{2i}-\pi i\cos i$$

$$=\pi[\cos 2+i(\sin 2-\cosh 1)].$$

这题最关键的一行是三个距离，不是最后的指数化简。

两个内部点都在时怎么办 以 $1/[(z-a)(z-b)]$ 为例，$a\neq b$ 时先部分分式

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right).$$

分别判断两点是否在曲线内，再用基本公式。更一般时，可挖出每个缺点的小圈，各算一个局部积分再相加，这仍是本章的柯西方法，不必提前依赖第五章留数公式。

3.3 · 教材57—61页

14 为什么解析就有无限阶导数；只给实部也有用

从柯西公式对 a 作差商，差商的核趋向 $(z-a)^{-2}$。因为内部点离边界有正距离 δ，分母可统一远离零，长大不等式保证极限可交换进积分。反复进行就得到高阶公式。**重点在“正距离带来统一估计”**，而不是形式上无条件把导数搬进积分号。

教材还给出圆周实部决定中心导数的式子：

$$f'(a)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}f(a+re^{it})e^{-it}\,dt.$$

主线是先把一阶柯西公式参数化，再把 $\oint f\,dz=0$ 的共轭形式相加，虚部项消去，留下实部。它用于从边界实部恢复导数，也是后续边值问题的入口。第一轮普通积分题优先熟练前两条框中公式；这条公式知道用途、能跟住推导即可，不必优先背。

另一个有用后果是柯西估计：在半径 R 圆周上若 $|f|\le M$，则 $|f^{(n)}(a)|\le n!M/R^n$。它把长大不等式接到高阶公式上，第四章估计级数系数时会再用到。

第三章 / 3.4

原函数

教材62—64页

3.4 · 教材62—64页

15 原函数与牛顿—莱布尼茨公式

若 $F'(z)=f(z)$ 在区域 D 内成立，就称 F 是 f 的一个原函数。有原函数时，任何位于 D 内、从 A 到 B 的分段光滑路径都满足

$$\int_A^B f(z)\,dz = F(B)-F(A).$$

这时积分路径无关，闭路积分为零。$\cos z$ 的原函数是 $\sin z$，多项式和指数也可直接积分。原函数可以相差一个复常数，区域连通使这个常数是全域统一的。

例题 从0到 $\pi+2i$ 积分 $\cos(z/2)$，用原函数 $2\sin(z/2)$，结果 $2\sin(\pi/2+i)=2\cosh 1$。不用为曲线形状纠结，因为原函数全平面有效。

3.4 · 教材62—64页

16 从闭路积分为零造出原函数

固定 z_0，若 f 连续且所有闭路积分为零，则连接 z_0 到 z 的积分与路径无关，可定义

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

为了求 F'，只看 z 到 $z+h$ 的一小段直线。将 $f(\zeta)$ 拆成 $f(z)+[f(\zeta)-f(z)]$，后一项除以 h 后仍由连续性与长大不等式控制为趋零，所以 $F'=f$。

逻辑链必须清楚 单连通域内解析，保证闭路积分为零；闭路积分为零加连续，保证存在原函数。事实上第二步的核心是路径无关，不再需要重复依赖单连通。教材把单连通保留在定理陈述中，是方便使用的条件，不能把它误当作每个特定函数有原函数的必要条件。

3.4 · 教材62—64页

17 对数原函数的限制与莫雷拉定理

$1/z$ 在割开负实轴的平面有原函数 $L(z)$，但在整个去心平面没有全局单值原函数，否则绕单位圆积分就应为0，与 $2\pi i$ 矛盾。$1/z^2$ 则有全局原函数 $-1/z$，即使区域有洞也不受影响。

莫雷拉定理的主意 若 f 在区域内连续，而且每个足够小的三角形边界积分均为零，则 f 解析。用刚才的方法在小圆盘构造原函数 F，有 $F'=f$；解析函数的导数仍解析，所以 f 解析。教材以所有闭路积分为零来陈述，条件更强、也方便接上上一段。

为什么讲它？它提供“由积分性质反推解析性”的方向，用于证明极限函数等仍解析。第一轮一般计算题不常直接使用，可先会说出“连续 + 一族闭路积分为零 → 解析”，完整证明结构留在这里供理论题复习。不要误写成“某一条闭路积分为零就解析”。

第三章 / 3.5

解析函数与调和函数的关系

教材64—68页

3.5 · 教材64—68页

18 调和函数：两个二阶偏导相加为零

实函数 $u(x,y)$ 在区域内有连续二阶偏导，且

$$\Delta u = u_{xx}+u_{yy}=0,$$

就叫调和函数。x^2-y^2 调和，x^2+y^2 不调和，因为后者的拉普拉斯为4。

若 $f=u+iv$ 解析，则 u,v 都调和。证明从 C-R 出发：$u_{xx}=v_{yx}$、$u_{yy}=-v_{xy}$，由混合偏导相等消去。解析函数有任意阶连续导数，保证这些步骤合法。v 称为 u 的共轭调和函数；注意这与复数共轭 $\bar f$ 是两个概念。

反过来有条件 在单连通域内，调和 u 能找到全局单值的共轭调和函数；局部总可以。多连通域则可能只能局部找到，例如 $u=\ln|z|$ 在去心平面调和，但对应的角度不可能全域单值连续。

3.5 · 教材64—68页

19 已知实部补虚部：积分后补一个函数

假设给出 $u=x^3-3xy^2$。先确认 $u_{xx}+u_{yy}=6x-6x=0$。C-R 给

$$v_y=u_x=3x^2-3y^2,\qquad v_x=-u_y=6xy.$$

对第一式按 y 积分：$v=3x^2y-y^3+g(x)$。**积分常数必须写成 $g(x)$**，因为当前只对 y 积分。再对 x 求导，与第二式比较，得 $g'(x)=0$，故

$$v=3x^2y-y^3+C,\qquad f(z)=z^3+iC.$$

若再给 $f(0)=0$，则 $C=0$。已知实部后只剩一个纯虚常数；若已知虚部，则只剩一个实常数。

标准步骤 验调和 → 写两条 C-R → 积一条并保留另一个变量的任意函数 → 用另一条确定它 → 用初值定常数 → 必要时整理成 z 的表达式。不能只做其中一条 C-R 就宣布完成。

3.5 · 教材64—68页

20 教材已知虚部的例题，两个方法对应起来

给 $v=2x^2-2y^2+x$，要求 $f(0)=1$。由 C-R：$u_x=v_y=-4y$，所以 $u=-4xy+g(y)$；再用 $u_y=-v_x=-4x-1$，得 $g'(y)=-1$，故 $u=-4xy-y+C$。

整理成复数式：

$$f=u+iv=2iz^2+iz+C.$$

由初值 $C=1$，所以 $f=2iz^2+iz+1$。这是教材例2。

教材还沿折线积分

$$u(x,y)=\int (v_y\,dx-v_x\,dy)+C.$$

从原点先水平走到 $(x,0)$，再竖直走到 (x,y)，第一段为0，第二段给 $-(4x+1)y$。与刚才结果一致。第一轮优先练“积分后补函数”，路径积分法保留，是为了说明共轭函数存在与单连通的联系。

3.5 · 教材64—68页

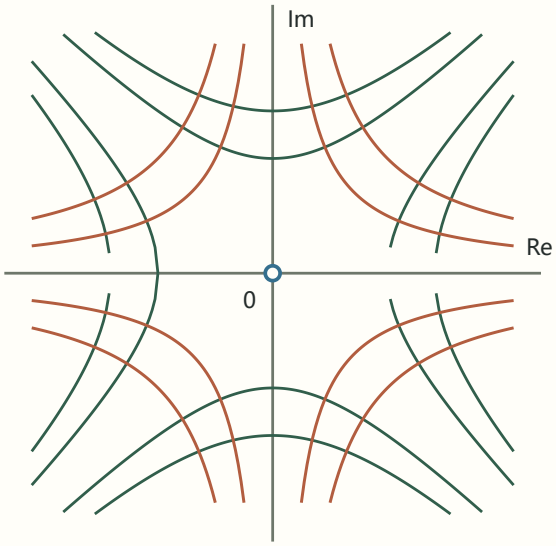
21 等值线为什么正交，原点为什么可能例外

解析 $f=u+iv$ 且 $f'(z)\neq 0$ 时，等值线 $u=c_1$ 与 $v=c_2$ 在交点正交。因为法向量分别是 $\nabla u,\nabla v$，由 C-R

$$\nabla u\cdot\nabla v=u_xv_x+u_yv_y=u_x(-u_y)+u_yu_x=0.$$

非零导数条件确保这些梯度非零，等值线在该点有通常的切线。

图 3-4 z²的实部与虚部等值线在非临界点正交



绿色：x²-y² = 常数

橙色：2xy = 常数

原点 f′(0)=0

临界点另行分析

梯度点积为0；非零导数确保两族等值线有正常切线。

这是解析函数z²的两族正交等值线；原点不套用一般正交结论。

对 $f=z^2$，两族线是 $x^2-y^2=c_1$ 与 $2xy=c_2$，一般交点正交。在原点 $f'=0$，零等值线各自分叉，不能把那里当成两条光滑曲线直接套正交结论。

这段几何不是额外负担：下一节的等势线和电力线就是这两族等值线。你要掌握正交的条件、会画简单例子，不必徒手画出每一条复杂双曲线的精确形状。

第三章 / 3.6

平面场

教材68—73页

3.6 · 教材68—73页

22 平面场和无源无旋，先用熟悉的分量读

平面向量场写成 $W=P(x,y)+iQ(x,y)$，代表向量 (P,Q)。稳定指不随时间改变；平面场还要求沿垂直该平面的方向分布不变。无限长均匀带电直线的横截面是平面场；空间单个点电荷的完整三维场不属于这种模型。

散度 P_x+Q_y 描述局部源汇，旋度的垂直分量 Q_x-P_y 描述局部旋转。无源无旋即

$$P_x+Q_y=0,\qquad Q_x-P_y=0.$$

于是 $\overline{W}=P-iQ$ **是解析函数**，因为它的 C-R 恰好就是这两个方程；一般不是 W 本身解析。

对逆时针曲线，

$$\oint_C \overline{W}\,dz=\oint_C (P\,dx+Q\,dy)+i\oint_C (P\,dy-Q\,dx)=\Gamma+i\mathcal{Q}.$$

实部是环量，虚部是向外通量。这个式子由直接相乘得到，比分别死记正负号可靠。格林公式进一步把二者变成区域内旋度、散度的面积分。

3.6 · 教材68—73页

23 从解析原函数到场：注意本书复势的定义

若区域单连通、场无源无旋，可取解析函数 $F=\phi+i\psi$，使

$$F'=\overline{W},\qquad \phi_x=P,\quad \phi_y=Q,$$

$$\psi_x=-Q,\qquad \psi_y=P.$$

因此 ϕ 的等值线与场方向垂直，ψ 的等值线沿场方向。对静电场，通常的电势为 $V=-\phi$，使 $\mathbf{E}=-\nabla V$。

严镇军本书的静电复势约定 为

$$\Phi=-iF=\psi+iV.$$

由此

$$\boxed{E_x+iE_y=-i\,\overline{\Phi'(z)}.}$$

所以 $\operatorname{Re}\Phi$ **的等值线是电力线，** $\operatorname{Im}\Phi$ **的等值线是等势线**。一些教材把 $V+i\psi$ 叫复势，符号位置不同；本讲义按这本书来。复势不是场强，求场强还要先求导、再共轭、乘 $-i$。

这里保留完整转换，是为了做原书习题22时不混淆实虚部。流体力学也用类似结构，但势函数和流函数的命名、符号应依具体定义核对，不能把静电的符号直接搬过去。

3.6 · 教材68—73页

24 平面点电荷：圆周等势，射线沿场

本书采用的电磁单位约定下，原点处的“平面点电荷” q 代表垂直纸面的无限长线电荷横截面，场为

$$E=\frac{2qz}{|z|^2}=\frac{2q}{\bar z},\qquad z\neq 0.$$

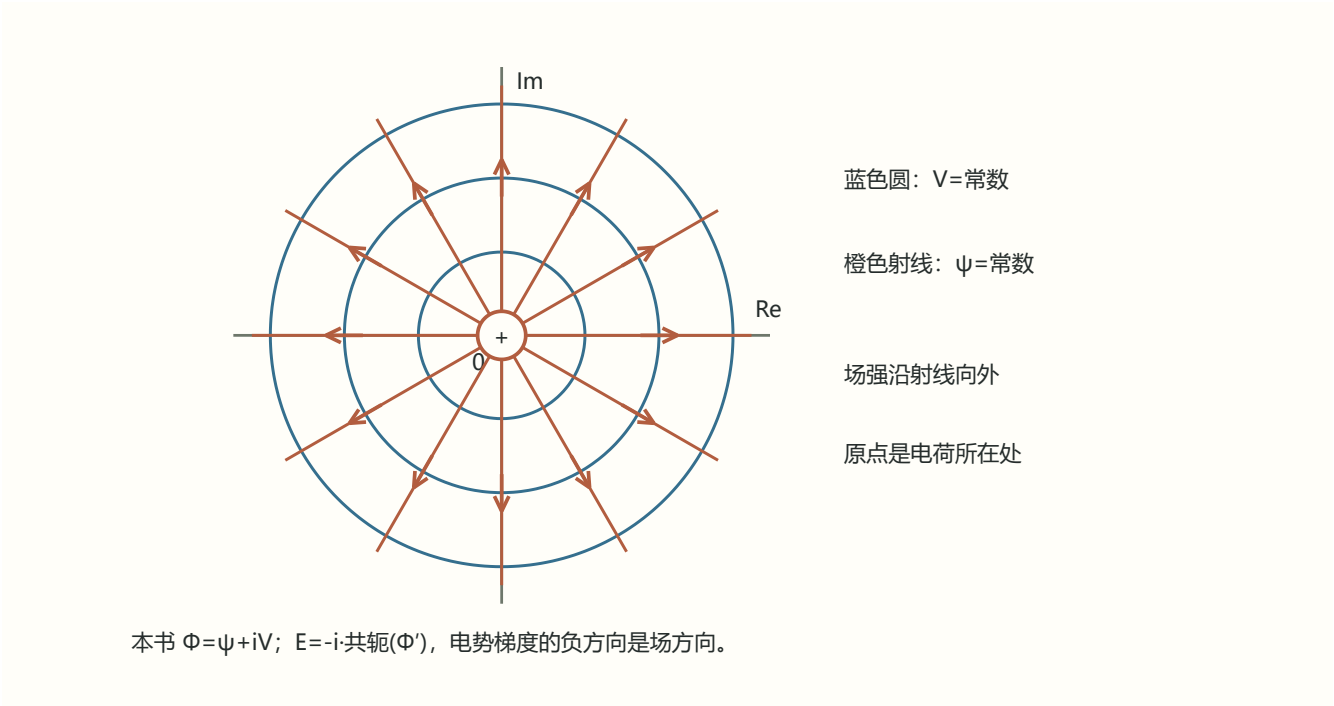
常数 $2q$ 与单位制有关；学习重点是 $1/\bar{z}$ 的方向与距离关系，使用其他单位制时应调整物理常数。

按上一单元公式可取

$$\Phi(z) = -2qi\,\mathrm{Ln}\,z.$$

在一个对数分支上，$\Phi = 2q\theta - 2qi\ln r$。所以电力线 $\theta =$ 常数 是射线；等势线 $r =$ 常数 是同心圆。$q > 0$ 时场向外，$q < 0$ 时场向内。

图 3-5 正平面点电荷：射线是电力线，同心圆是等势线



q>0；圆周与射线正交，离电荷越近场强越大。

对数多值不妨碍导数与场强单值。绕原点一周后，复势的实部变常数，但场强仍回到原值。原点处有源，故不能把包含原点的整个区域说成无源，也不能忽视多连通造成的全局原函数问题。

3.6 · 教材68—73页

25 两个异号电荷与最简单的匀强场

在 a, b 分别放 $q, -q$，叠加得

$$\Phi = -2qi\,\mathrm{Ln}(z-a) + 2qi\,\mathrm{Ln}(z-b).$$

局部写成对数比后，等势线为 $|z-a|/|z-b| = k$，这正是第一章的距离比轨迹：$k \neq 1$ 为圆，$k = 1$ 为垂直平分线。电力线为两向量夹角恒定的圆弧族，其几何圆通过 a, b，实际曲线不含电荷点；退化情况可能为直线的一部分。画图时不应把整个圆一律当成同一辐角分支的单条曲线。

原书习题22的最小示范 若 $\Phi = az$、$a > 0$，则 $\psi = ax, V = ay$，场强为 $-ia$，即竖直向下的匀强场。电力线 $x =$ 常数，等势线 $y =$ 常数。若 $\Phi = z^2$，则 $\psi = x^2 - y^2, V = 2xy$，场强 $-i\overline{2z} = -2y - 2ix$。这一步可反查 $-\nabla V = (-2y, -2x)$，符号一致。

为什么这节值得保留 它把“解析函数、调和、正交”连成可算的物理模型，并解释前两章的圆与辐角曲线为何会出现。若当前考试只考复积分，可先学会定义与转换框，复杂电荷分布放第二轮；但本书这一节正文和习题涉及的基本计算仍在讲义中完整保留。

第三章 / 3.7

习题路线与检查题

原书习题74—77页

3.7 · 原书习题74—77页

26 遇到一道积分题，先选哪条路

观察到的形式	首选方法	先检查
含共轭、模、分段函数	参数化	路径方向，$dz = z'dt$
有全域有效原函数	牛顿—莱布尼茨	路径是否在原函数域内
闭路内外都解析	柯西积分定理	内部缺点、分支、曲线上奇点
解析分子除 $(z-a)^m$	高阶柯西公式	a 内外、分子解析、阶乘
多个分母点	分式拆分或挖小圈	逐个点的位置
只要求证明上界或极限	长大不等式	上界是否对整条曲线统一
给实部/虚部求函数	C-R 补共轭	先验调和、常数和初值

原书第1—2题练参数化与方向；第3—4、7—8题练估计；第5、9题把复积分连到实积分；第6题练原函数；第10—15题集中练柯西公式与分母点位置；第16题考边界值能否来自解析函数；第17—21题练调和与共轭；第22—23题练平面场。

第一轮先做1、2、3、6、10、11、13、17、20，每类选足代表小题。第二轮补大弧估计、边界值证明、非线性调和函数组合与复势电荷分解。区分的是复习次序，不是说后半章没有用途。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习1 一条线段和一条圆弧可以不同

从 $-i$ 到 i 计算 $\int_C |z|\,dz$：一条路径为直线段，另一条为单位圆右半圆。

展开解析：连续就能积分，但未必路径无关

线段取 $z=it,-1\le t\le 1$，得 $i\int_{-1}^{1}|t|dt=i$。右半圆上 $|z|=1$，积分就是 $\int_C dz=i-(-i)=2i$。结果不同，说明 $|z|$ 没有覆盖这些路径的全域原函数。不要因为端点相同就直接写相等。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习2 方向与基础积分

沿 $|z-2|=3$ 顺时针一周，计算 $\oint_C[1/(z-2)+1/(z-2)^2]dz$。

展开解析：先按正向算，再反号

正向一阶项为 $2\pi i$，二阶项为0。顺时针结果为 $-2\pi i$。二阶项虽然有内部奇点，但仍积分为0；不能用“有奇点就一定非零”判断。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习3 外圈内圈怎么加

对圆环 $1<|z|<3$ 的正向全边界，求 $\oint_{\partial D}dz/z$；若只取外圆逆时针，又是多少?

展开解析：全边界与一条外圈不是同一条曲线

外圆逆时针贡献 $2\pi i$，内圆顺时针贡献 $-2\pi i$，总和0。只取外圆则为 $2\pi i$。$1/z$ 在圆环上解析，满足多连通边界定理；但原点不在圆环里，不能让外圈在允许域内缩成一点。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习4 柯西公式的内、外、线上三种情况

$C:|z|=R$ 逆时针，求 $\oint_C e^z/(z-1)\,dz$，分别讨论 $R=2,1/2,1$。

展开解析：先定位点1

$R=2$ 时，点1在内，结果 $2\pi i e$。$R=1/2$ 时，点1在外，被积函数在闭圆盘邻域解析，结果0。$R=1$ 时，分母在路径上为零，普通复曲线积分无定义；若另谈主值或绕行必须额外定义，本题没有这种约定。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习5 高阶公式的阶乘

沿 $|z|=2$ 正向，求 $\oint_C e^z/(z-1)^3\,dz$。

展开解析：三次分母对应二阶导

分子 $f=e^z$ 整，点1在内，故结果 $(2\pi i/2!)f''(1)=\pi i e$。若得到 $2\pi i e$，通常是漏了阶乘；若求了三阶导，则是把分母次数与求导阶数混淆。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习6 两个点的位置改变结果

计算 $I_R=\oint_{|z|=R} e^z/[z(z-3)]\,dz$，讨论 $0<R<3$ 与 $R>3$，均取正向。

展开解析：把两个分母点分开处理

恒等分解为 $e^z[1/(z-3)-1/z]/3$。当 $0<R<3$，只有0在内，得 $I_R=-2\pi i/3$。当 $R>3$，两点均在内，得 $I_R=2\pi i(e^3-1)/3$。$R=3$ 时曲线上有奇点，不属于上述两类普通积分。每个拆分后的解析分子都是 e^z，条件明确。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习7 用估计证明大圆积分消失

对 $R>2$，证明 $\left|\oint_{|z|=R} dz/(z^2+1)\right|\le 2\pi R/(R^2-1)$，并取极限。

展开解析：分母用反三角不等式

$|z^2+1|\ge R^2-1$，圆周长 $2\pi R$，长大不等式给出目标上界，且上界趋零，所以积分趋零。这里不必先精确算积分。估计体现“函数量级 R^{-2} 乘路径长度量级 R”后还剩 R^{-1}，因而消失。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习8 原函数有时需要割线

比较 $1/z$ 与 $1/z^2$ 在去心平面上是否有单值原函数；并计算沿上半单位圆从1到 -1 的 $\int dz/z$。

展开解析：先看全局，再算具体弧

$1/z$ 无全局单值原函数，否则整圈积分应为0；$1/z^2$ 有原函数 $-1/z$。上半圆取 $z=e^{it}, t:0\to\pi$，得 $\int i\,dt = i\pi$。也可在覆盖这条路径的合适割线域选择连续对数；不能使用沿负实轴不连续的主值分支，未经端点说明直接套用它。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习9 给实部补出解析函数

已知 $u=x^2-y^2+2x$，求解析 $f=u+iv$，且 $f(0)=i$。

展开解析：积分常数先写成函数

u 调和。由 $v_y=u_x=2x+2$，得 $v=(2x+2)y+g(x)$；再由 $v_x=-u_y=2y$，得 $g'=0$。故 $f=z^2+2z+iC$，初值给 $C=1$，结果 $f=z^2+2z+i$。直接展开可核对实部与初值。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习10 一个看起来简单的实部也可能不行

能否在任意开圆盘内找到实部为 $u=x^2+y^2$ 的解析函数？若实部改为 $\ln|z|$，在去心平面上能否全局实现？

展开解析：局部微分条件与全局拓扑分别检查

第一问不能，因为 $\Delta u=4\neq 0$，不满足解析实部必须调和的必要条件。第二问 $\ln|z|$ 在非零处调和，局部可作为对数分支实部；但去心平面上不存在全局单值解析函数拥有这个实部。若存在，由 C-R 其导数必须为 $1/z$，而该函数应成为 $1/z$ 的全局原函数，与整圈积分 $2\pi i$ 矛盾。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习11 按本书复势约定求场

静电复势为 $\Phi=z^2$，求力函数、电势和场强，并写两族等值线。

展开解析：实部是力函数，虚部是电势

$\Phi = x^2 - y^2 + 2ixy$，故力函数 $\psi = x^2 - y^2$，电势 $V = 2xy$。$E = -i\overline{2z} = -2y - 2ix$，即向量 $(-2y, -2x)$，也等于 $-\nabla V$。电力线 $x^2 - y^2 = C$，等势线 $2xy = C'$；除原点这类场强零点外，两族线正交。

3.7 · 原书习题74—77页 · 自编检查题

练习12 把复积分变成一个实积分

利用 $\oint_{|z|=1} e^z/z\,dz$，求 $\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,dt$。

展开解析：先参数化，再比较实虚部

柯西公式给整圈积分 $2\pi i$。代入 $z = e^{it}$，$dz/z = i\,dt$，所以 $i\int_0^{2\pi} e^{e^{it}}dt = 2\pi i$，即 $\int_0^{2\pi} e^{\cos t}[\cos(\sin t) + i\sin(\sin t)]dt = 2\pi$。比较实部得答案 2π；虚部积分为0。原书第9题取0到 π，利用对称性得到 π，要留意积分区间。

3.7 · 原书习题74—77页

27 本章易错表与进入第四章的衔接

容易写错的话	正确检查
闭曲线积分都为零	还要检查内部解析性或全域原函数
函数在圆周附近解析就能用定理	内部的奇点、孔洞也要处理
内圆也是逆时针	正向区域边界的内圆顺时针
三次分母求三阶导	求二阶导，除 2!
共轭调和函数就是复共轭	一个是补足解析函数的实函数，一个是把虚部变号
给出调和函数一定有全局共轭	单连通保证全局；多连通要另查
无源无旋场本身解析	按 $P + iQ$ 记场时，它的共轭解析

本讲义以正确的格林展开和 C-R 符号书写第54页证明，避免将偏导项的加减号照抄后误用。书中第61页的圆周实部公式是补充推导，不强迫第一轮优先背。第70—73页复势记号在本讲义统一为 F 与 Φ，把原函数与静电复势区分，所有符号都回到本书定义核验。

能独立完成参数化、柯西公式和补共轭这三类题后，再回看第四章：泰勒系数来自高阶柯西公式，罗朗系数来自圆环的内外边界，负一次幂积分为 $2\pi i$ 是提取系数的原因。这样四章就不是四堆互不相干的公式，而是一条连续的方法链。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本第三章整理；正文印刷页48—73，章末习题74—77。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。第三章含12道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月15日。