数学物理方法 / 复变函数

第七章学习讲义

拉普拉斯变换

定义与收敛 → 运算法则 → 延迟与卷积 → 反演留数 → 初值问题。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材169—201页　24道自编检查题　离线SVG公式与图解

本章先抓住一件事：**把时间函数换成一个关于p的函数，微分方程就能化成代数方程，初始条件也一起进入计算。** 前六章讲的解析性、留数，现在成了逆变换的工具。

对应原书印刷页169—201，扫描PDF第175—207页。其中正文169—190页，附表191—197页，习题197—201页。本讲义按原书7.1定义、7.2运算法则、7.3反演公式的顺序展开，再补查表说明与习题路线。重新组织解释和推导，不逐字转录原文。

做题的达标线： 会从定义算最简单的变换；能识别指数乘子、时间延迟、乘t、对时间求导这四种不同动作；会把分段函数写成阶跃形式；能求有理函数的逆变换；会把初值准确带入方程，算完再代回检查。

第一轮优先学7.1—7.6和常用变换表，先不用记全部特殊函数。7.7会逐类说明原书附表每一组条目的用途，哪些只需会查。文末24道自编检查题全部有解析；原书习题1—9另列路线，题号互不混用。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

7.1 定义收敛与最基本的变换	教材169—172页
7.2 线性相似位移与像函数微分	教材172—176页
7.3 本函数微积分与初值方程	教材176—179页
7.4 延迟分段信号与周期	教材179—182页及附表
7.5 卷积定理与积分方程	教材182—184页
7.6 反演公式留数与有理函数	教材184—190页
7.7 怎样使用两张附表与特殊函数	教材191—197页
7.8 原书习题路线与解题检查	教材197—201页
7.9 二十四道自编检查题与完整解析	全章复习

第七章 / 7.1

定义收敛与最基本的变换

教材169—172页

7.1 · 教材169—172页

01 本函数、像函数，先认清两边的变量

拉普拉斯变换定义为

$$F(p)=\mathcal{L}[f](p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt,\qquad p=\sigma+i\omega.$$

$f(t)$叫本函数，$F(p)$叫像函数。t是时间等实变量，p是变换后的复变量；F不是f换个字母，而是把整段时间行为通过积分编码后的新函数。

本书采用单边变换：只积分$t\geq 0$。讨论因果信号时把$t<0$部分延为0，并用

$$h(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$

表示单位阶跃。后面常把“$t\geq 0$时的1”和$h(t)$简写成同一对本函数，但遇到延迟时必须重新写清开关。

单个点的取值不会改变通常的积分，所以$h(0)$约定取1或$1/2$都不影响普通拉氏变换；初值公式用的是右极限$f(0+)$，不是随意指定的孤立点值。

7.1 · 教材169—172页

02 为什么要乘指数：先压住增长，再累积信息

把核分开：

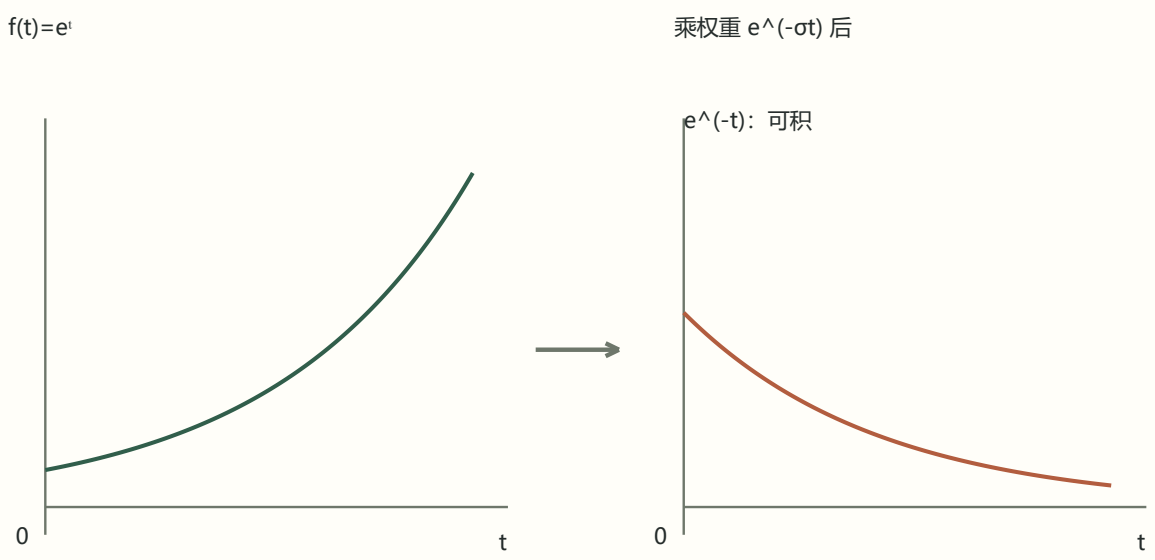
$$e^{-pt}=e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}.$$

$e^{-\sigma t}$负责衰减，$e^{-i\omega t}$负责振荡。即使$f(t)$本来增长或一直振荡，只要衰减足够强，乘积也可能可积。

例如$f(t)=e^{at}$，若a为复常数，乘核后是$e^{-(p-a)t}$。绝对值为$e^{-(\operatorname{Re}p-\operatorname{Re}a)t}$，所以准确的收敛域是$\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a$。

别把“$F(p)$能写出一个代数式”与“积分在此处收敛”混为一谈。 $1/(p-a)$在很多点有意义，但作为e^{at}的拉氏积分，仅在指定右半平面成立。超出那里可以讨论解析延拓，却不能再直接声称原积分收敛。

图 7-1 衰减权重能否压住增长，取决于实部的位置



图示 σ=2：压住 e^t；此例收敛要求 Re p>1；σ=2时乘积为e^(-t)，尾积分有限。

7.1 · 教材169—172页

03 存在定理：条件是充分的，不是所有函数的准入名单

教材采用“每个有限区间逐段光滑”和“指数增长型”作为方便的充分条件。后者指存在$K>0, c$使充分大的t满足$|f(t)| \le Ke^{ct}$；若从0到有限时间也有界，可调整K写成对全部$t \ge 0$成立。

对$\sigma = \operatorname{Re} p > c$,

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|\,dt \le K\int_0^\infty e^{-(\sigma-c)t}\,dt = \frac{K}{\sigma-c}.$$

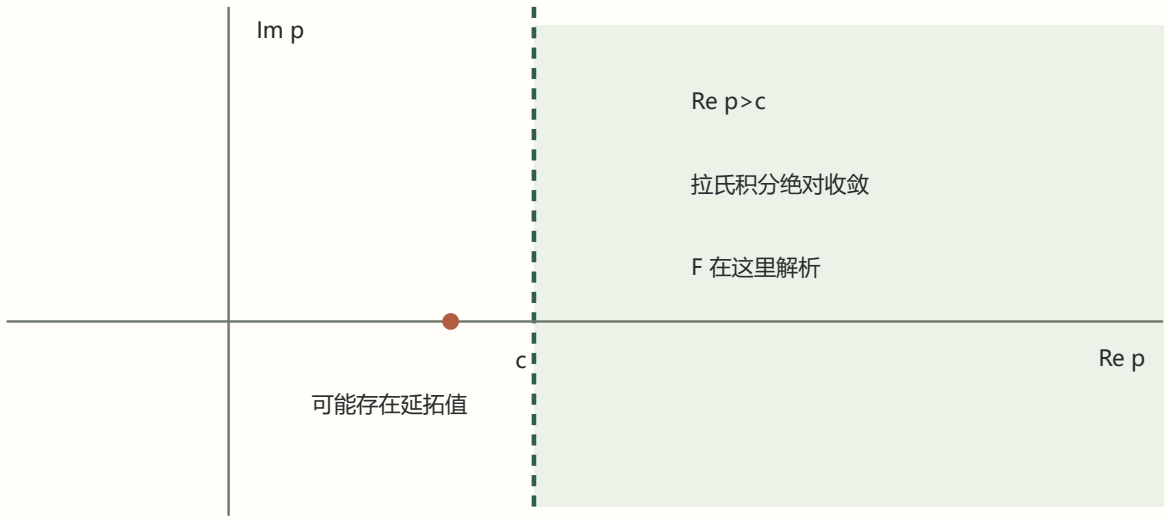
因此在$\operatorname{Re} p > c$绝对收敛。每个更靠右的闭半平面都能用同一衰减函数控制尾积分，进一步得到F在右半平面解析。

解题要掌握： 会写这一行比较估计，知道右半平面为什么出现，并在结果旁标收敛条件。证明“一致收敛推出解析”的完整技术可以第二轮再读；它的作用是保证后面对p求导、移积分线等运算有根据。

这不是必要条件。例如$t^{-1/2}$在0附近无界，仍局部可积，有拉氏变换；e^{t^2}在无穷远增长快于任何固定指数，对任何有限实部p，正实积分都发散。不要用定理条件不满足就直接断言不存在，要检查实际积分。

当实数$p \to +\infty$时，上式也给出$F(p) \to 0$。这个结论针对这里的普通函数；冲激δ的变换为1，属于广义函数范围，不能拿来反驳该结论。

图 7-2 积分只在收敛右半平面成立；代数延拓范围更大



收敛域是一个区域条件，不能只记录分式及其极点。

用增长估计保证右半平面；实际收敛域有时比保守估计更大。

虚线是由增长估计给出的界线。某个左侧点代数式有限，不能证明原积分在此收敛。

7.1 · 教材169—172页

04 和傅里叶变换是什么关系，为什么要讲

令$g_\sigma(t)=h(t)f(t)e^{-\sigma t}$。固定一个足够大的$\sigma$，则

$$F(\sigma+i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

所以沿一条竖线看拉氏变换，就是看“乘过衰减权重的因果函数”的傅里叶变换。它解释了为什么常数、正弦等虽不绝对可积，仍然可以有拉氏变换，也解释了7.6反演公式为什么沿竖线积分。

掌握边界： 不会傅里叶变换也能先做本章的大多数计算题。此段保留是为了理解反演的来源；第一轮记住“加权以后做傅里叶，最后把权重还原”即可。

7.1 · 教材169—172页

05 从定义算指数、常数和幂函数

在$\mathrm{Re}(p-a)>0$时，

$$\mathcal{L}[e^{at}]=\left[-\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{p-a}.$$

取$a=0$得$\mathcal{L}[1]=1/p$，$\operatorname{Re}p>0$。反过来读就是$\mathcal{L}^{-1}[1/(p-a)]=e^{at}$，默认$t\geq 0$，因果延拓时乘$h(t)$。

对非负整数n，反复分部积分可得

$$\mathcal{L}[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

更一般地，对实数$\alpha>-1$，

$$\mathcal{L}[t^{\alpha}]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}},\qquad \operatorname{Re}p>0.$$

在右半平面取连续对数定义$p^{\alpha+1}$。对实数$p>0$，换元$x=pt$立刻得到伽马积分；对复p可以用解析延拓论证，不能把复数换元后仍沿正实轴积分而不说明路径。

$\Gamma(n+1)=n!$，$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$，因此$\mathcal{L}[t^{-1/2}]=\sqrt{\pi}/\sqrt{p}$、$\mathcal{L}[\sqrt{t}]=\sqrt{\pi}/(2p^{3/2})$。第一轮会用这两个值即可，不必先学完伽马函数理论。

第七章 / 7.2

线性相似位移与像函数微分

教材172—176页

7.2 · 教材172—176页

06 线性关系与四个三角双曲函数

由积分的线性，

$$\mathcal{L}[\alpha f+\beta g]=\alpha F+\beta G.$$

逆变换也线性。利用欧拉公式把$\sin,\cos$拆为指数，马上得到

$$\mathcal{L}[\cos bt]=\frac{p}{p^2+b^2},\qquad \mathcal{L}[\sin bt]=\frac{b}{p^2+b^2}.$$

取$b>0$实数时，两式的收敛域为$\operatorname{Re}p>0$。双曲函数由实指数的和差得到

$$\mathcal{L}[\cosh bt]=\frac{p}{p^2-b^2},\qquad \mathcal{L}[\sinh bt]=\frac{b}{p^2-b^2},\qquad \operatorname{Re}p>|b|.$$

原书用ch, sh表示cosh, sinh。**分母p^2+b^2对应正弦余弦，p^2-b^2对应双曲函数；分子也要配对，不能少掉b。**

例如$1/(p^2+9)$的逆变换是$\sin 3t/3$，不是$\sin 3t$。这是最常见的查表丢系数。

7.2 · 教材172—176页

07 相似定理：压缩时间要付出一个比例

若$a>0$，令$u=at$，则

$$\mathcal{L}[f(at)](p)=\frac{1}{a}F(p/a).$$

对应的另一种写法是

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}f(t/a)\right]=F(ap).$$

两个式子是同一换元，别把其中的$1/a$挪错。限制$a>0$是因为单边积分和因果方向不允许随便反转时间。

例如$f(t)=e^{-t}$、$a=3$：$\mathcal{L}[e^{-3t}]=(1/3)/(p/3+1)=1/(p+3)$。把一个熟悉指数代进去，是检验缩放方向的最快办法。

若原收敛域是$\operatorname{Re}p>c$，新函数$f(at)$的收敛域变为$\operatorname{Re}p>ac$。像平面缩放和时间缩放是反向关系。

7.2 · 教材172—176页

08 位移定理：时间上乘指数，像平面移动自变量

直接合并指数：

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](p)=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-a)t}\,dt=F(p-a).$$

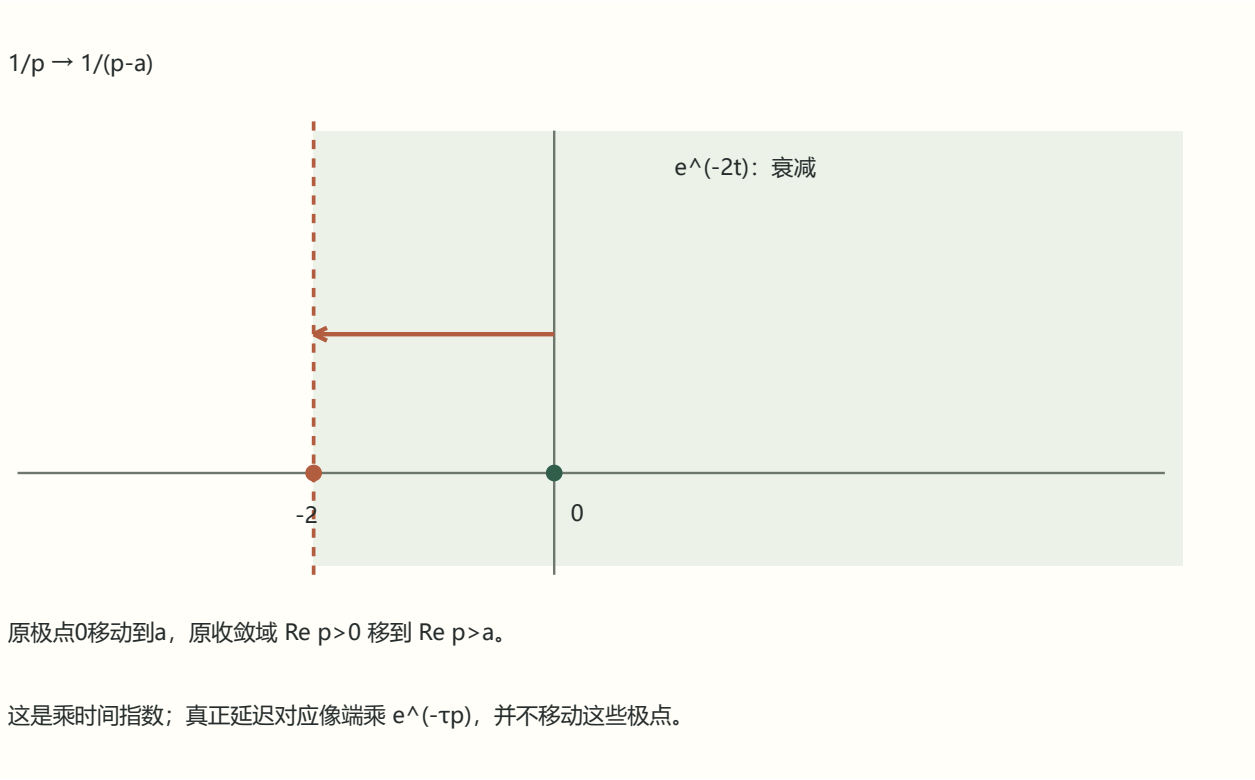
所以

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin bt]=\frac{b}{(p-a)^2+b^2},\qquad \mathcal{L}[e^{at}\cos bt]=\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}.$$

若原收敛域是$\operatorname{Re}p>c$，新域为$\operatorname{Re}p>c+\operatorname{Re}a$。极点也沿$a$的方向移动。不要把$p-a$误写成$p+a$；取$f=1$检查就能纠错。

这与后面的“延迟定理”不同：此处时间函数没有向右推迟启动，而是每个时刻乘一个指数。二者都会被有些教材称为第一、第二位移定理，做题时直接辨认动作最稳妥。

图 7-3 乘 e^{at} 使像函数的极点与收敛域一起平移



图示 a=-2：向左平移2；乘e^(-2t)后极点在-2，收敛要求Re p>-2。

7.2 · 教材172—176页

09 像函数微分：对p求导，对应时间上乘t

在收敛右半平面内部，可以对p求导：

$$F'(p)=\int_0^\infty (-t)f(t)e^{-pt}\,dt.$$

因此

$$\mathcal{L}[t^n f(t)]=(-1)^n F^{(n)}(p).$$

负号来自$\partial_p e^{-pt}=-te^{-pt}$。这一步的导数变量是$p$，不是$t$。

教材中的两个直接应用为

$$\mathcal{L}[t\sin bt]=\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2},\qquad \mathcal{L}[t\cos bt]=\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}.$$

如果出现$t^2e^{at}\cos bt$，可以先把基本变换位移，再对p求两次导；或者先求两次导，再把p换为$p-a$。这两种次序在这里相容。

7.2 · 教材172—176页

10 原书例1：$t^2\cos^2t$为什么先降幂

先用$\cos^2 t=(1+\cos 2t)/2$，把乘积变成线性和，再利用上一条：

$$\mathcal{L}[t^2\cos^2 t]=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4}\right).$$

算两次导数并合并，得到

$$\mathcal{L}[t^2\cos^2 t]=\frac{2(p^6+24p^2+32)}{p^3(p^2+4)^3},\qquad \operatorname{Re}p>0.$$

方法比最后的长分式重要： 看到三角函数平方，先降幂；看到外面的t^n，再对像函数求导。不要求背这个结果，应该能按路线重新算出。

7.2 · 教材172—176页

11 两种微分放在一起记，避免串公式

时间端做什么	像端做什么	初值是否出现
乘t：$tf(t)$	$-F'(p)$	不出现
对t求导：$f'(t)$	$pF(p)-f(0+)$	出现

一个是把t带进积分，另一个是分部积分。记忆时说出操作及变量，别只背“微分变乘法”这句话。

图 7-4 两种微分：乘时间与对时间求导



左边的导数在像平面，对p求；右边的原函数导数对时间t求，两条公式不能互换。

第七章 / 7.3

本函数微积分与初值方程

教材176—179页

7.3 · 教材176—179页

12 本函数微分法：初始条件从边界项进入

若f足够光滑、无内部跳跃，且f, f'满足相应可积增长条件，分部积分得

$$\mathcal{L}[f'] = \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(0+).$$

上端为0靠的是足够大的$\mathrm{Re}\,p$与增长估计；下端留下$-f(0+)$。再用一次，得到

$$\mathcal{L}[f''] = p^2F - pf(0+) - f'(0+).$$

一般n阶为

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = p^n F - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0+).$$

普通导数公式不能无条件跨过跳跃点。 若f在内部有跳跃，分段求导会丢掉跳跃贡献；应分段计算边界项，或把导数按含冲激的广义导数处理。后面的阶跃与冲激会让这个区别更直观。

7.3 · 教材176—179页

13 原书例2：一阶初值问题完整走一遍

题为$y' + 2y = e^{-t},\ y(0) = 0$。设$Y = \mathcal{L}[y]$，先变换每一项：

$$(pY - 0) + 2Y = \frac{1}{p+1}.$$

解代数方程：

$$Y = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}.$$

逐项逆变换，得$y = e^{-t} - e^{-2t}$。最后检查：$y(0) = 0$；
$y' + 2y = (-e^{-t} + 2e^{-2t}) + 2(e^{-t} - e^{-2t}) = e^{-t}$。

这个方法自动处理初值，不需要先求通解再定常数。但初值若不是0，绝不能因为流程看起来简洁而漏掉它。

7.3 · 教材176—179页

14 原书例3：二阶初值问题

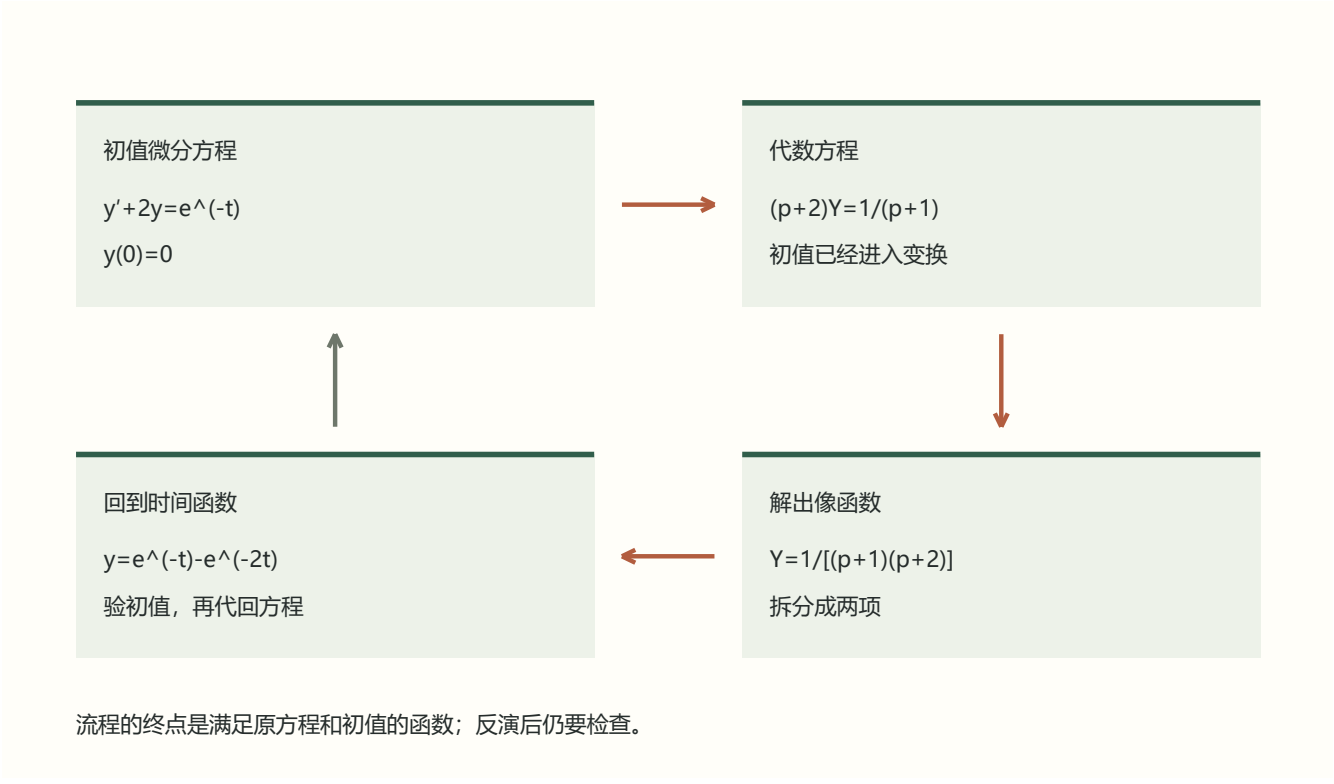
$y'' + y = t,\ y(0) = y'(0) = 0$。代入二阶导数公式：

$$(p^2+1)Y = \frac{1}{p^2}, \qquad Y = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

所以$y = t - \sin t$。检查$y(0) = 0, y'(0) = 1 - \cos 0 = 0$，且$y'' + y = \sin t + t - \sin t = t$。

如果初值变成$y(0) = A, y'(0) = B$，左边应是$(p^2+1)Y - pA - B$，所以解多出$A\cos t + B\sin t$。先把这一行写对，后面的代数就不会把自由响应漏掉。

图 7-5 初值问题经过变换、代数求解、逆变换，再代回检验



变换把导数和初值一并代数化，逆变换给出特定初值解。

7.3 · 教材176—179页

15 本函数积分：累积一次，像端除以p

记$q(t)=\int_0^t f(u)\,du$。因为$q'=f, q(0)=0$，由微分公式得到

$$F=pQ, \qquad \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right]=\frac{F(p)}{p}.$$

再累积一次就是F/p^2。这也等于与常数1卷积，后面会统一解释。

例如$\mathcal{L}[\int_0^t e^{2u}u\,du]=1/[p(p-2)^2]$。不需要先把时间积分算完再变换；识别累积结构能直接省一步。

7.3 · 教材176—179页

16 原书例4：积分方程与RC电路

原式为

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,du=E, \qquad R,C,E>0.$$

右边是$t \geq 0$的恒定电压，变换为E/p，不是E。设$I = \mathcal{L}[i]$：

$$\left(R + \frac{1}{Cp}\right) I = \frac{E}{p}, \qquad I = \frac{E/R}{p + 1/(RC)}.$$

所以$i(t) = (E/R)e^{-t/(RC)}$。代回$t = 0+$可得$i(0+) = E/R$；随时间增大电流衰减，积分电荷逐步承担电压。

物理描述保留的用途是帮助检查符号和时间尺度：指数必须衰减，时间常数是RC。只考运算题时不必深究电路推导，但应知道为什么常数输入变成E/p。

第七章 / 7.4

延迟分段信号与周期

教材179—182页及附表

7.4 · 教材179—182页及附表

17 延迟定理：整个函数一起向右平移

若$\tau > 0$，从τ才启动的延迟函数写成$h(t-\tau)f(t-\tau)$。变换时从τ起积分，再令$u = t - \tau$：

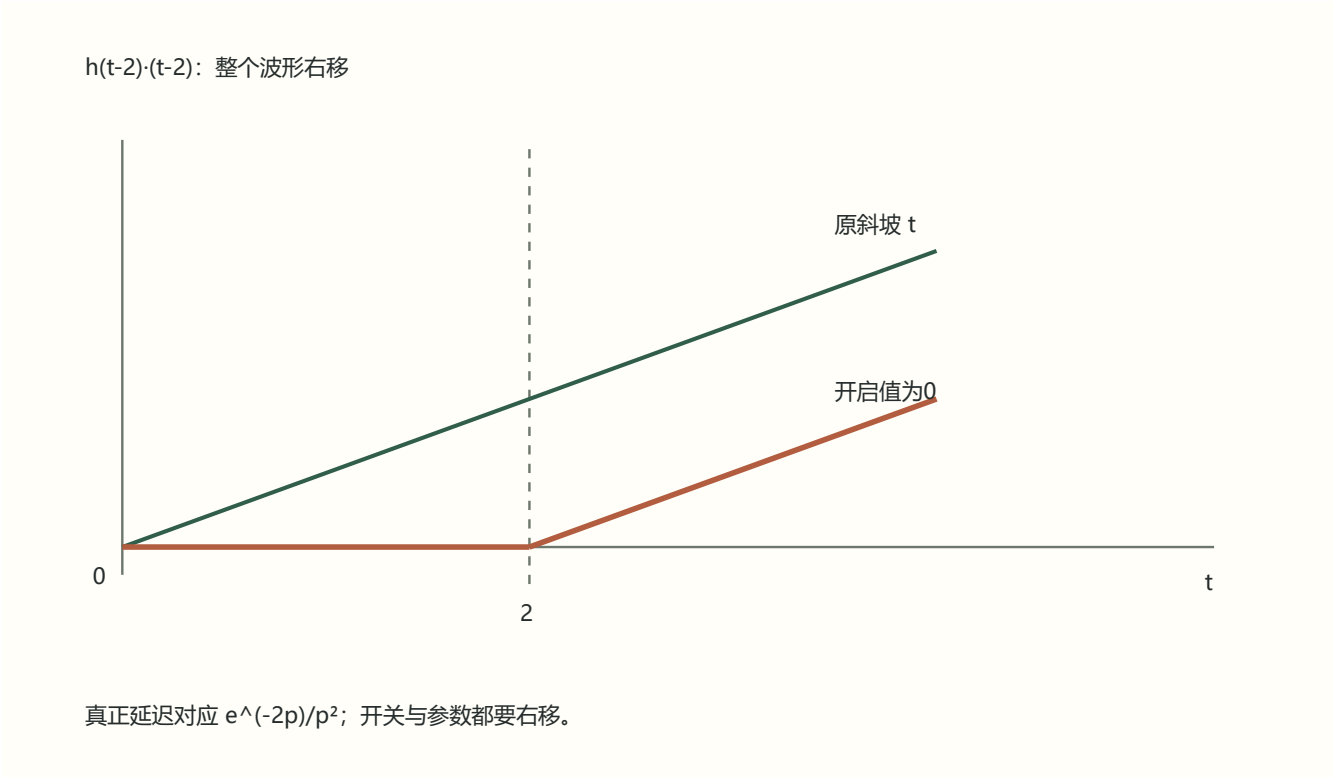
$$\mathcal{L}[h(t-\tau)f(t-\tau)] = e^{-\tau p}F(p).$$

反过来

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\tau p}F(p)] = h(t-\tau)f(t-\tau).$$

这次时间上真的向右挪动，像端是乘指数$e^{-\tau p}$；7.2的位移定理则是时间上乘指数、像端替换p。指数里带p还是带t，一眼就应分清。

图 7-6 真正延迟与只改启动时刻，是两种波形



图示 h(t-2)·(t-2)：延迟斜坡；橙线从t=2才开始，形状与原斜坡相同，是整体右移。

7.4 · 教材179—182页及附表

18 $h(t-a)g(t)$不能直接套成$e^{-ap}G(p)$

正确写法是把$t = u + a$:

$$\mathcal{L}[h(t-a)g(t)] = e^{-ap}\mathcal{L}_u[g(u+a)](p).$$

例如

$$h(t-2)t = h(t-2)\big[(t-2)+2\big],$$

所以变换为$e^{-2p}(1/p^2 + 2/p)$。若错写成e^{-2p}/p^2，得到的是从0开始上升的延迟斜坡，原函数却在$t = 2$时跳到2。

再如$h(t-a)\sin bt$：先写成$\sin[b(t-a)+ba]$，展开角度和，变换为

$$e^{-ap}\frac{b\cos ba + p\sin ba}{p^2+b^2}.$$

波形题的关键是启动时刻与相位是否一起移动。 原书习题1(17)(18)、2就是专门检查这个区别。

7.4 · 教材179—182页及附表

19 把分段函数写成阶跃：从“增量”拼起来

若从0到a用$g_0(t)$，从a起改成$g_1(t)$，则

$$f(t)=g_0(t)+h(t-a)\big[g_1(t)-g_0(t)\big].$$

后面的括号是切换时增加或减去的差值。多个切换点就逐次叠加。

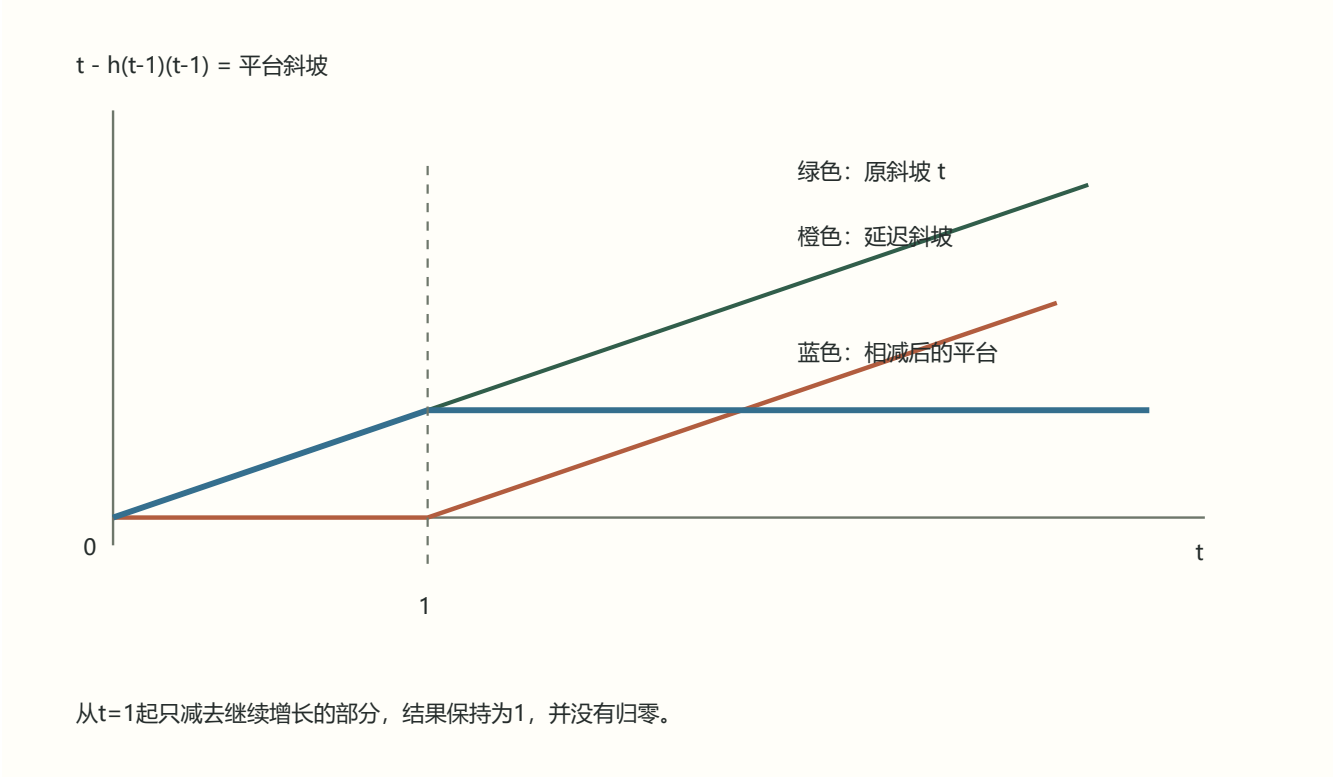
原书例5是$f=t$在$0\le t\le 1$、$f=1$在$t>1$：

$$f(t)=t-h(t-1)(t-1),\qquad F(p)=\frac{1-e^{-p}}{p^2}.$$

这不是从$t=1$起把整个函数关掉，而是从那时起减去继续增长的部分，留下水平平台。

矩形脉冲幅度A、起点a、终点b则为$A[h(t-a)-h(t-b)]$，像为$A(e^{-ap}-e^{-bp})/p$。画图时标开关点，点值选择不影响变换。

图 7-7 原函数减去延迟斜坡，得到平台



蓝色函数为min(t,1)，像函数(1-e^(-p))/p²；两个斜坡从启动后斜率相消。

7.4 · 教材179—182页及附表

20 原书例6：阶梯函数如何变成几何级数

每隔τ增加E，从$t=0$的E开始：

$$K(t)=E\sum_{n=0}^{\infty}h(t-n\tau).$$

任意固定时间只有有限项不为0。变换后在$\operatorname{Re}p>0$得到

$$\mathcal{L}[K]=\frac{E}{p}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\tau p}=\frac{E}{p(1-e^{-\tau p})}.$$

阶梯函数不周期，它是逐步累加；出现$1-e^{-\tau p}$并不自动代表原函数周期。真正周期公式的分子是“一个周期的加权积分”，下一段会说明。

7.4 · 教材179—182页及附表

21 周期与反周期：附表中的两条重要公式

若$t\ge 0$上$f(t+T)=f(t)$，把积分按周期拆开：

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-npT}\int_0^T f(u)e^{-pu}\,du=\frac{\int_0^T f(u)e^{-pu}\,du}{1-e^{-pT}}.$$

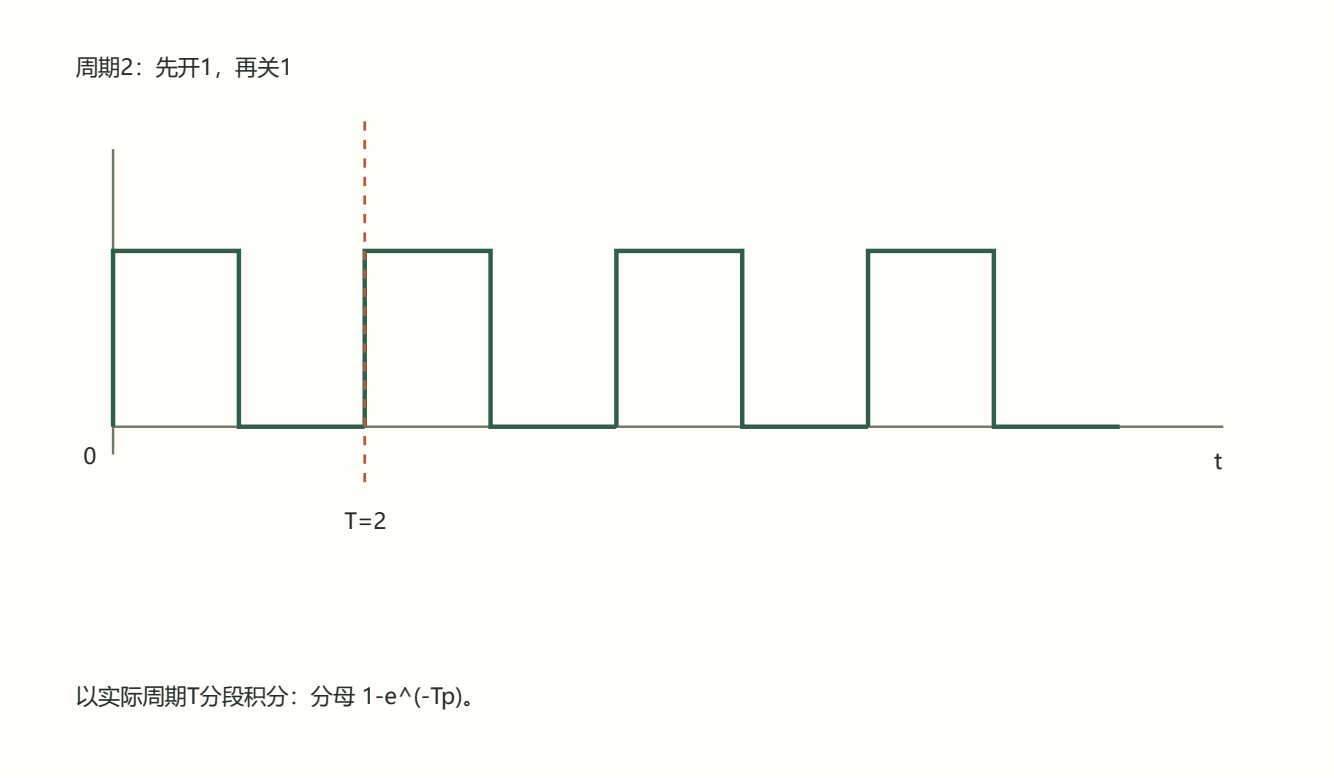
对有界逐段连续周期函数，$\operatorname{Re}p>0$就足够。若$f(t+T)=-f(t)$，同样推导把分母改为$1+e^{-pT}$；这里T是反周期，通常周期是$2T$。

以$b>0$为例，$|\sin bt|$周期为$T=\pi/b$，一个周期内等于$\sin bt$，因此

$$\mathcal{L}[|\sin bt|]=\frac{b}{p^2+b^2}\frac{1+e^{-\pi p/b}}{1-e^{-\pi p/b}}=\frac{b}{p^2+b^2}\coth\frac{\pi p}{2b}.$$

双曲余切只是几何级数的另一种写法。普通$\sin bt$满足反周期关系，而绝对值后的波形满足周期关系；这一区别决定分母符号。

图 7-8 一个周期重复，与反周期变号的区别



图示 周期矩形波；每两单位时间才完整重复，不能把开关间隔1当作周期。

第七章 / 7.5

卷积定理与积分方程

教材182—184页

7.5 · 教材182—184页

22 卷积：每个过去时刻的贡献累加到现在

两个因果函数的卷积定义为

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-u)g(u)\,du,\qquad t\ge 0.$$

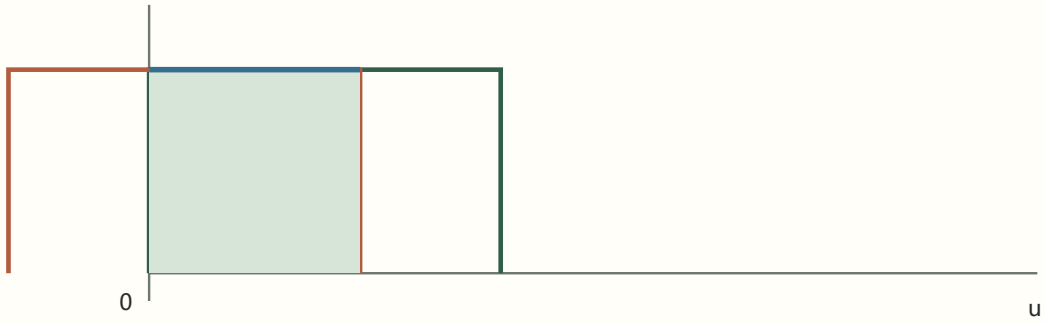
u遍历过去时刻，$g(u)$给出当时输入，$f(t-u)$给出经过$t-u$时间后的作用，把这些乘积累加起来。这是系统响应的基本结构。

卷积不是逐点乘积。 通常$\mathcal{L}[fg]\neq FG$；正确关系是$\mathcal{L}[f*g]=FG$。

通过换元可证交换律$f*g=g*f$，在适当可积条件下还有结合律、分配律。做计算时先选让积分更简单的写法，尤其是一个函数为1或指数时。

图 7-9 卷积通过重叠长度累积；矩形卷积成为三角形

f 与 g 都是区间[0,1]上的单位矩形



绿色 g(u) 固定；橙色 f(t-u) 随t滑动。

乘积积分 = 重叠长度 = 0.60

t∈[0,1] 时卷积为t；t∈[1,2] 时为2-t；区间外为0。

图示 t=0.6：重叠增长；当前t=0.6，重叠区间[0.00,0.60]，卷积值0.60。

7.5 · 教材182—184页

23 卷积定理为什么成立：换积分次序

把定义代入：

$$\mathcal{L}[f*g]=\int_0^\infty\int_0^t f(t-u)g(u)e^{-pt}\,du\,dt.$$

积分区域是$0\le u\le t<\infty$。交换次序，u先从0到∞，t再从u到∞；令$v=t-u$，被积函数分裂成

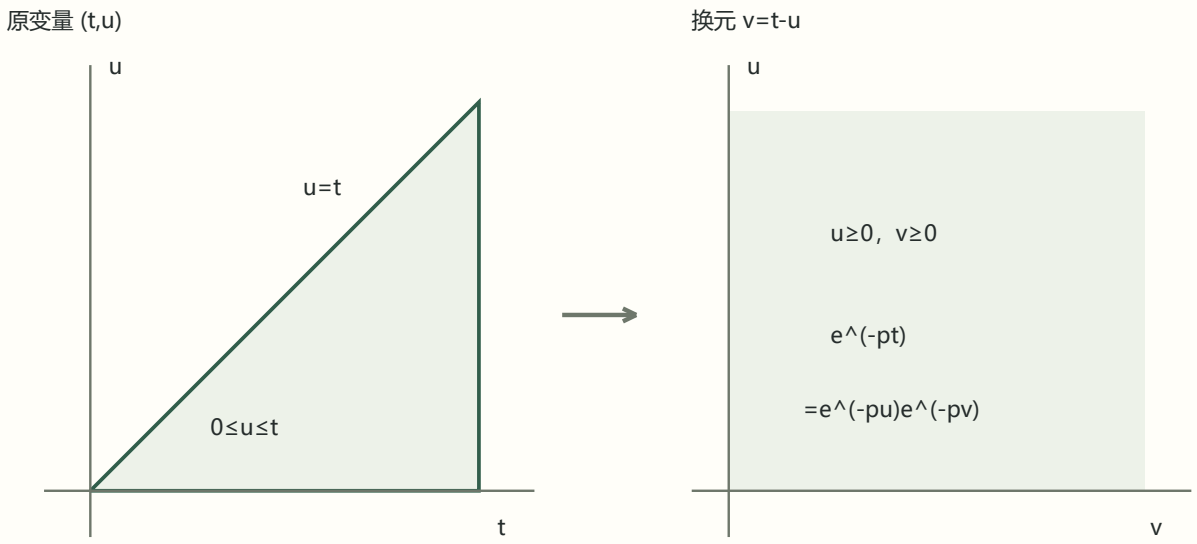
$$f(v)e^{-pv}\,g(u)e^{-pu}.$$

在绝对收敛保证下，二重积分变成两个积分的乘积：

$$\mathcal{L}[f*g]=F(p)G(p).$$

为什么要保留这段证明？它能让你识别积分方程中的卷积，知道积分上下限为何是0和t，以及为什么乘积的逆变换不能直接写成$f(t)g(t)$。第一轮会画积分区域、会分离变量即可，增长估计的全部细节可第二轮补。

图 7-10 交换积分次序后，三角区域变成两个独立的非负变量



变量范围独立后，二重积分分离为两个拉氏积分，相乘得到F·G。

原三角区域在换元后成为第一象限；绝对可积保证交换次序合法。

7.5 · 教材182—184页

24 原书例7：误差函数从卷积自然出现

求$\mathcal{L}^{-1}[\sqrt{a}/(p\sqrt{p+a})]$，$a>0$。先拆成三个因子：

$$\sqrt{a}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{p+a}}.$$

已知逆变换分别为常数、1与$e^{-at}/\sqrt{\pi t}$。用卷积：

$$f(t)=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-au}}{\sqrt{u}}\,du.$$

令$x=\sqrt{au}$，得到

$$f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{at}}e^{-x^2}\,dx=\operatorname{erf}(\sqrt{at}).$$

这两个显示公式里的系数都与后面的积分相乘。误差函数就是高斯积分的一种命名，不是突然增加了一种运算。第一轮知道定义、能认出这个逆变换即可，不必手算误差函数的小数值。

7.5 · 教材182—184页

25 乘积的逆变换，能用部分分式也能用卷积

例如

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \quad \longleftrightarrow \quad \int_0^t e^{-a(t-u)}e^{-bu}\,du.$$

$a\neq b$时积分为$(e^{-bt}-e^{-at})/(a-b)$；$a=b$时退化为te^{-at}。前者可以部分分式，后者是重极点。不要把$a\neq b$的公式直接在分母为0时硬代。

若$f(t)=r(t)+\lambda\int_0^t k(t-u)f(u)\,du$，则

$$F=R+\lambda K F,\qquad F=\frac{R}{1-\lambda K}.$$

这就是卷积积分方程的代数化。求完仍需逆变换，并代回初始时刻与原式检查。

原书习题9写作$f=a\sin bt+c(\sin bt*f)$，于是

$$F=\frac{ab}{p^2+b^2}+\frac{cb}{p^2+b^2}F.$$

把含F的项收集到左侧，解得$F=ab/(p^2+b^2-bc)$。令$\Omega=\sqrt{b^2-bc}$，在$b>c>0$下，

$$f(t)=\frac{ab}{\Omega}\sin\Omega t.$$

耦合常数改变振动频率，这就是保留此例的物理意义。

第七章 / 7.6

反演公式留数与有理函数

教材184—190页

7.6 · 教材184—190页

26 竖直反演积分：从下往上，在线右侧选实部

沿$\mathrm{Re}\,p=\sigma$取$p=\sigma+i\omega$，把7.1的加权傅里叶关系反演，便得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}\,dp.$$

σ选在收敛半平面内；对本章有理像函数，可以取在全部极点右侧。路径从下往上，且$dp = i\,d\omega$，这就是系数$1/(2\pi i)$的来源。

教材在连续点陈述公式；跳跃处在常见的分段光滑条件下得到左右极限的平均值。普通拉氏变换不区分只在有限个点上不同的函数，因此逆变换应按分段连续代表理解。

做题需要会用并解释路径，不必每题重写这条无穷积分。 绝大多数本章计算题更适合查表、部分分式或留数。

7.6 · 教材184—190页

27 为什么$t>0$时往左闭合

核的模为$|e^{pt}| = e^{t\,\mathrm{Re}\,p}$。当$t > 0$，左侧衰减，故把向上的竖线从顶部沿左侧回到底部，得到逆时针闭路。

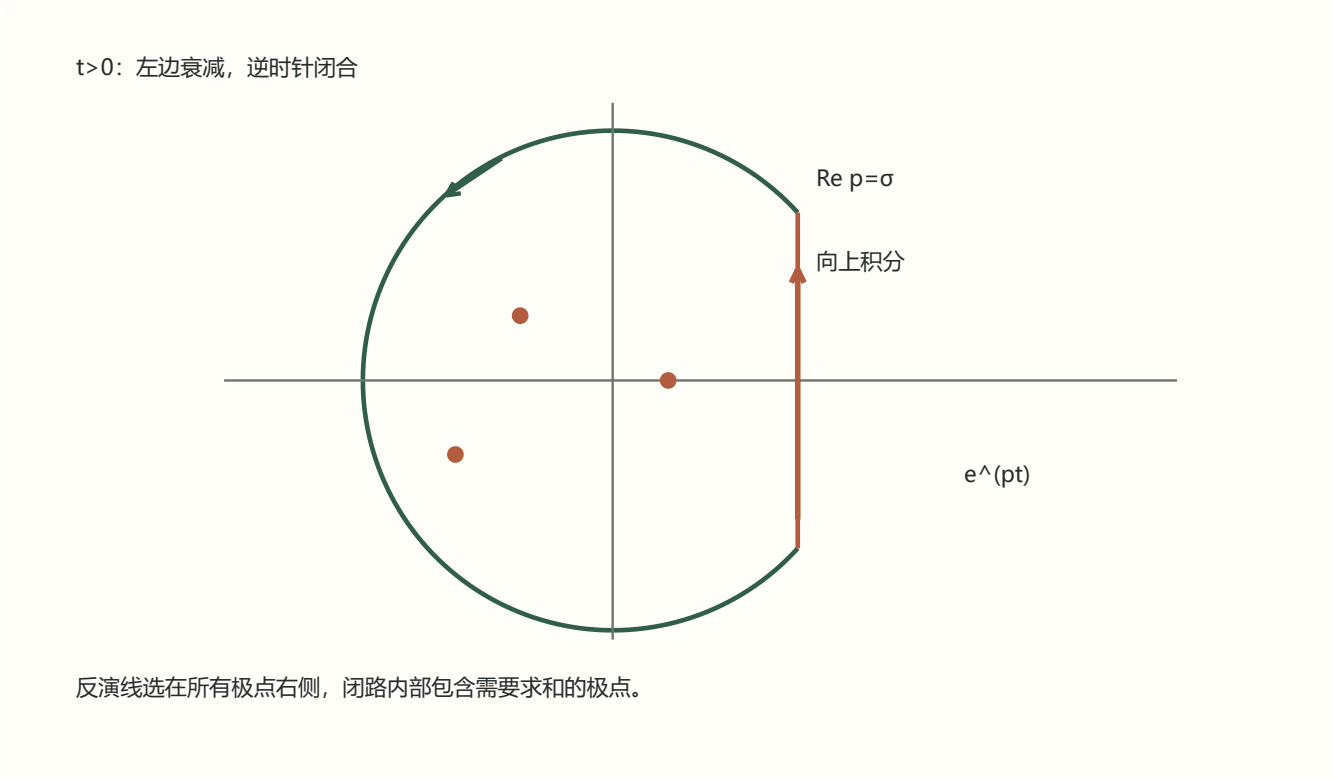
在辅助弧积分消失的条件下，

$$f(t) = \sum_{k} \mathrm{Res}\big(F(p)e^{pt}; p_k\big).$$

对严格真有理函数，即分子次数小于分母次数、有限个极点，$t > 0$可用这种留数反演。**求留数的对象是$F(p)e^{pt}$，不是单独的$F(p)$。** 后者会把所有时间信息丢掉。

对于带$e^{-\tau p}$的式子，核变成$e^{p(t-\tau)}$，应先用延迟定理；在$t < \tau$时不能不加判断地仍往左闭合。一般非有理函数还可能有分支切口，需要额外的切口积分，不能只数极点。

图 7-11 反演线向上走；t>0时在左边闭合



图示 t>0：左边指数衰减；竖线向上，左弧从上回到底部，整体逆时针，留数求和取正号。

7.6 · 教材184—190页

28 简单极点、重极点与共轭成对

若$F=A/B$，p_k为B的简单零点且未被分子约去，

$$\operatorname{Res}(Fe^{pt};p_k)=\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_kt}.$$

若$p=a$为m阶极点，写$F=H(p)/(p-a)^m$，其中H解析，则

$$\operatorname{Res}(Fe^{pt};a)=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\big(H(p)e^{pt}\big)\right]_{p=a}.$$

这里阶乘系数与整个导数相乘。重极点通常产生e^{at}乘一个t的多项式；最基本的一对是$1/(p-a)^m \leftrightarrow t^{m-1}e^{at}/(m-1)!$。

若A,B为实系数，多项式的非实根共轭出现。对实t，两个对应的简单极点贡献互为共轭，合为一个贡献的$2\,\mathrm{Re}$，这样结果自然是实函数。

图 7-12 极点的实部、虚部与重数，分别决定增长、频率与多项式因子



极点位置和阶数给出本函数形状的线索；具体系数还需查表、部分分式或留数计算。

7.6 · 教材184—190页

29 原书反演例1：留数法与部分分式给同一答案

给定

$$F=\frac{p+7}{p^3+p^2+3p-5}=\frac{p+7}{(p-1)((p+1)^2+4)}.$$

极点为$1,-1\pm 2i$。在$p=1$处贡献e^t；在$a=-1+2i$处，

$$\frac{a+7}{3a^2+2a+3}e^{at}=\frac{-2+i}{4}e^{-t}(\cos 2t+i\sin 2t).$$

共轭成对取两倍实部，得到

$$f(t)=e^t-e^{-t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

部分分式更容易手算：

$$F=\frac{1}{p-1}-\frac{p+2}{(p+1)^2+4}=\frac{1}{p-1}-\frac{p+1}{(p+1)^2+4}-\frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+4}.$$

逐项查表便得到同一结果。作为因果函数，其收敛域为$\mathrm{Re}\,p>1$；两个阻尼振荡项不会抵消e^t带来的增长。

7.6 · 教材184—190页

30 原书反演例2：三阶极点要对整个乘积求导

给定

$$F=\frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}.$$

-1为简单极点，贡献$e^{-t}/4$。在-3处令

$$H(p)=\frac{2p^2+3p+3}{p+1}=2p+1+\frac{2}{p+1}.$$

得到$H(-3)=-6, H'(-3)=3/2, H''(-3)=-1/2$。三阶极点留数为

$$\frac{1}{2}\left[H''+2tH'+t^2H\right]_{p=-3}e^{-3t}=\left(-3t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}\right)e^{-3t}.$$

故

$$f(t)=\frac{1}{4}e^{-t}+\left(-3t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}\right)e^{-3t}.$$

核对原书该页中间式时，三阶极点的系数应为$1/2!=1/2$；若扫描排版看成$1/3$，应按留数公式改正。结果可以再变换回去检查，不能靠中间字形决定系数。

7.6 · 教材184—190页

31 原书反演例3：两个二次因子与参数重合

对$a,b>0,a\neq b$,

$$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{p^2+a^2}-\frac{1}{p^2+b^2}\right).$$

所以

$$f(t)=\frac{\sin at/a-\sin bt/b}{b^2-a^2}.$$

关键是先把乘积化成两项的差，而不是强行展开四个复极点。参数重合$a=b$时回到重极点式：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\right]=\frac{\sin at-at\cos at}{2a^3}.$$

若$a=0$，$\sin at/a$按极限t理解，不能只把分母0代进去。第一轮先练非退化参数，再补这些极限情形。

7.6 · 教材184—190页

32 原书反演例4：方程组先相加相减

原方程组为$x'-x-2y=t,\ y'-2x-y=t$，初值$x(0)=2,y(0)=4$。变换后

$$\begin{cases}(p-1)X-2Y=2+1/p^2,\\ -2X+(p-1)Y=4+1/p^2.\end{cases}$$

相加与相减：

$$(p-3)(X+Y)=6+\frac{2}{p^2},\qquad (p+1)(X-Y)=-2.$$

因此令$M=(3p^2+1)/[p^2(p-3)]$，有$X=M-1/(p+1),Y=M+1/(p+1)$。分解

$$M=\frac{28/9}{p-3}-\frac{1}{9p}-\frac{1}{3p^2}.$$

所以

$$x(t)=\frac{28}{9}e^{3t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}-e^{-t},\qquad y(t)=\frac{28}{9}e^{3t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}+e^{-t}.$$

初值分别为2、4；$x-y=-2e^{-t}$正是相减后得到的独立衰减模式。不要看到方程组就急着逐个复杂消元，对称结构先相加相减会明显简化。

7.6 · 教材184—190页

33 原书反演例5：延迟先拆出来，双曲函数别认错

求

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1-e^{-4p}}{p^2-2}\right].$$

先令$g(t)=\sinh(\sqrt{2}\,t)/\sqrt{2}$，因为$\mathcal{L}[g]=1/(p^2-2)$。故

$$f(t)=g(t)-h(t-4)g(t-4).$$

$0\le t<4$时只有第一项；$t\ge 4$时减去延迟后的同一波形。此处不是$\sin(\sqrt{2}t)$，因为分母是减号。原书本例先查表的中间行与最后的sh形式要按这个对应关系核对。

延迟不等于“到4以后令整个解为0”；这里是减去一份延迟响应。只有本函数$g=1$等特殊形状才会在第二个开关后完全抵消。

第七章 / 7.7

怎样使用两张附表与特殊函数

教材191—197页

7.7 · 教材191—197页

34 附表7.1的16条法则，哪些必须熟练

原表序号	内容	掌握要求
1—2	定义、线性	必须会，所有拆项的起点
3—4	一阶与高阶时间导数	必须会，初值不能漏
5—6	一次与两次时间积分	必须会，分别除p,p^2
7	卷积	必须会，乘积逆变换与积分方程
8—9	乘t,t^n	必须会，分别$-F',(-1)^nF^{(n)}$
10	时间除以t	会推会查，须保证0附近可积
11	乘指数	必须会，$F(p-a)$
12	延迟	必须会，$e^{-\tau p}F$
13—14	时间缩放及缩放再乘指数	会由基本两条组合，不另背长式
15—16	周期、反周期	波形题要会，先算一段积分

表10的安全写法：当$f(t)/t$在0附近可积，且交换积分合法时，对实数p足够大，

$$\mathcal{L}[f(t)/t](p)=\int_p^{\infty}F(q)\,dq.$$

因为$\int_p^{\infty}e^{-qt}\,dq=e^{-pt}/t$。对复$p$可在收敛域中作相应路径延拓。例：

$$\mathcal{L}[\sin bt/t] = \arctan(b/p)$$

先在实数$p>0, b>0$上推，再按右半平面解析分支理解。取$f=1$则$1/t$在0不可积，不能套成$\int_p^\infty dq/q$。

组合式也能直接推：若$\mathcal{L}[f]=F$，$a>0$，

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}e^{bt/a}f(t/a)\right] = F(ap-b).$$

先看缩放，再看乘指数，两步写清比强记整行可靠。

7.7 · 教材191—197页

35 附表7.2前30项：按分母结构找，不逐行死背

原表序号	公式族	如何获得
1—4	常数、幂、指数	定义与伽马积分
5—10	三角、双曲、带指数三角	欧拉公式与位移
11—12	二次分母的平方	乘t法、卷积或重极点
13—15	p^3+b^3及不同分子	分解一个实根和一对共轭根
16—19	p^4+4b^4及不同分子	共轭极点；正弦与双曲函数的乘积
20—23	p^4-b^4及不同分子	$(p^2-b^2)(p^2+b^2)$拆分
24—25	两个不同一次因子	部分分式，参数相同时取极限
26	拉盖尔多项式L_n	只需会查；后续特殊函数再系统学习
27	$\lvert\sin bt\rvert$	一个周期积分，已经推导
28—30	分数幂、根式差、带指数的幂	伽马公式、位移与求导

原表26可先理解为一个可检验的有限多项式对：

$$L_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{t^k}{k!},\qquad \mathcal{L}[L_n]=\frac{(p-1)^n}{p^{n+1}}.$$

把有限和逐项变换，用二项式定理就得到结果，不必先研究其微分方程。

对于p^4+4b^4，不必硬背四行。令$c=b$，由复频率可推

$$\mathcal{L}[\cos bt\cosh bt]=\frac{p^3}{p^4+4b^4}.$$

再对时间求导或对p求导，可生成相关条目；最稳妥的备选仍是分解极点。对p^4-b^4则用三角与双曲函数的和差，基本因子已全部认识。

分数幂例子：

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{at}(1+2at)}{\sqrt{\pi t}}\right]=\frac{p}{(p-a)^{3/2}}.$$

根式差为

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{bt}-e^{at}}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\right]=\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}.$$

右边每支根都在足够右的半平面取与正实方向相容的分支。左边两项相减后0附近才可积，不能把两个各自发散的普通积分分开算。

7.7 · 教材191—197页

36 冲激及其导数：为什么像函数可以是常数或多项式

附表31—34涉及δ。它不是一个“除了0都为0、0处等于无穷”的普通函数，准确理解是对测试函数的取样规则：

$$\int \delta(t-a)\varphi(t)\,dt=\varphi(a).$$

按单边因果约定，$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$；$a>0$时$\mathcal{L}[\delta(t-a)]=e^{-ap}$。导数按$\langle\delta',\varphi\rangle=-\varphi'(a)$定义，所以

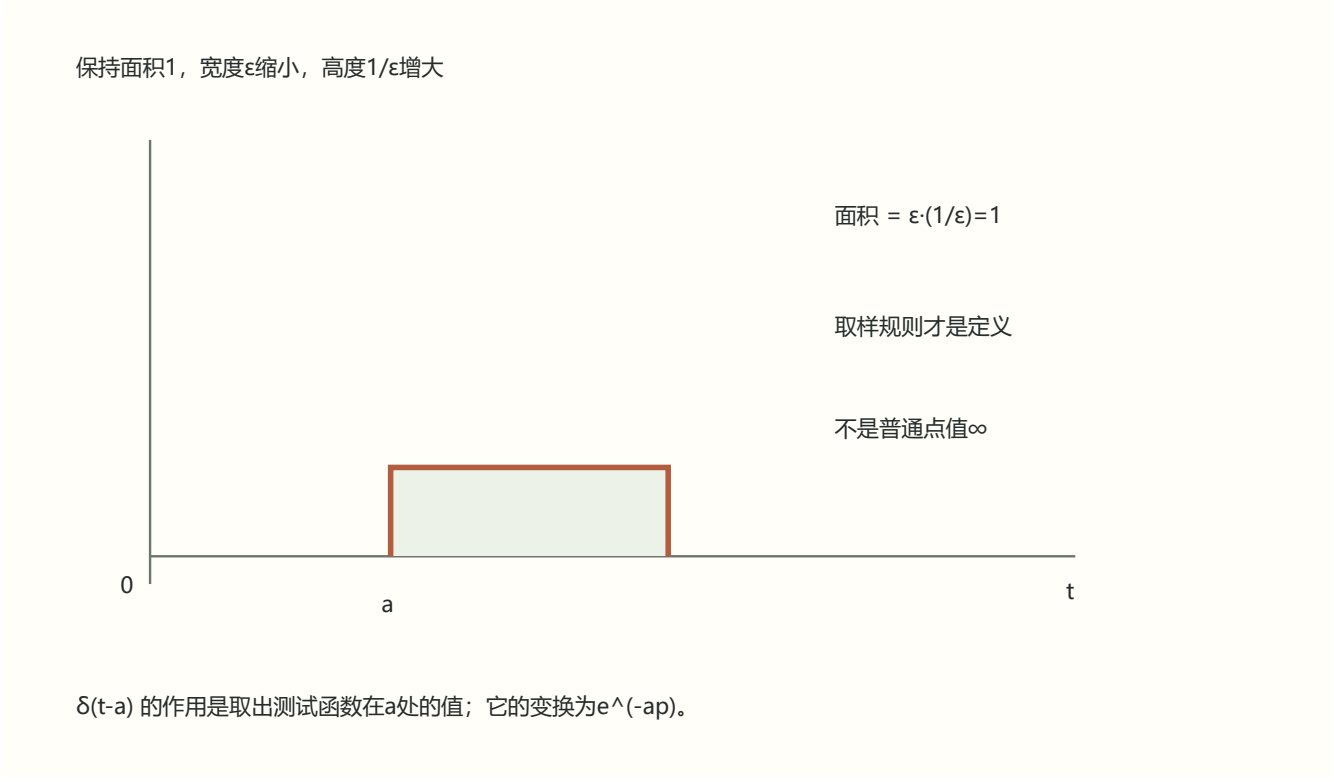
$$\mathcal{L}[\delta'(t-a)]=p\,e^{-ap}.$$

这里0处的冲激采用完整因果权重约定；不要混用“对称分布在半轴积分只取一半”的另一种约定。

这段为何要学？当像函数不是严格真分式，做多项式除法出现常数、p等项，逆变换可能含冲激，不能用普通连续函数硬配。例如$p/(p+1)=1-1/(p+1)$，逆变换是$\delta(t)-e^{-t}$。

若本轮只做原书普通函数题，冲激的分布理论可以暂缓，但应认识表中符号，知道它与普通函数存在定理使用的范围不同。

图 7-13 冲激是面积固定的尖脉冲极限，不是普通无穷高函数



图示 宽度0.5，高度2；图示仅用有限矩形近似面积固定的冲激；极限应按积分作用理解。

7.7 · 教材191—197页

37 误差函数和扩散核：附表35—45、53—57

记$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$。它们的区别直接影响衰减方向，查表时必须看清是否有补余号。

对$a > 0$，三个常用对为

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/(4t)},$$

$$e^{-a\sqrt{p}} \longleftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-a^2/(4t)},$$

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p} \longleftrightarrow \operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}}.$$

第一对是扩散方程经常出现的高斯核；对参数a求导可得第二对；时间积分或对a积分可联系第三对。这里是$e^{-a\sqrt{p}}$，不是e^{-ap}，所以它不是固定时刻的简单延迟。

附表38—39还涉及$e^{-2a\sqrt{t}}$、$e^{-a^2t^2}$与补误差函数；40—43是含$1/p$指数的振荡核；44—45属于$t^{-1/2}$乘三角函数。它们都由高斯积分、复参数或已知变换组合产生，第一轮会找表、核对变量位置即可，不必逐条背诵。

判断表式时有一个可直接推导的可靠版本：

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos bt}{\sqrt{\pi t}}\right]=\frac{1}{2}\left((p-ib)^{-1/2}+(p+ib)^{-1/2}\right),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin bt}{\sqrt{\pi t}}\right]=\frac{(p-ib)^{-1/2}-(p+ib)^{-1/2}}{2i}.$$

所有根式选右半平面分支。它们能避免把表中两种根式外形误配成同一个余弦函数。

附表53就是前面已推的$\operatorname{erf}\sqrt{at}$。另外两条容易误读的式子应为

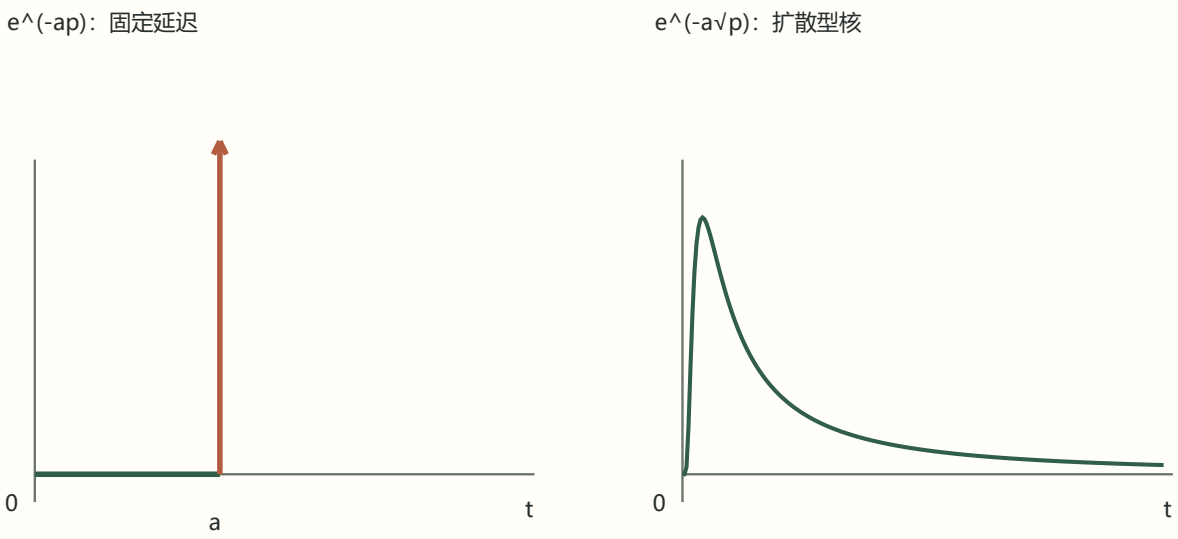
$$\mathcal{L}[e^{t}\operatorname{erfc}\sqrt{t}]=\frac{1}{p+\sqrt{p}},$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^{t}\operatorname{erfc}\sqrt{t}\right]=\frac{1}{1+\sqrt{p}}.$$

若写成erf，大t时会出现不相符的指数增长。用极限和收敛域检查，比单看扫描字形更可靠。附表57则是

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}+\sqrt{a}\,\operatorname{erf}\sqrt{at}\right]=\frac{\sqrt{p+a}}{p}.$$

图 7-14 固定时延与扩散型响应：指数里是 p 还是 √p



左：开关时刻明确。

右：t>0就有响应尾部。

右图取a=1，核为 exp[-1/(4t)]/(2√π·t^(3/2))，不是平移后的δ。

e^(-ap)对应δ(t-a)；e^(-a√p)对应随t连续分布的扩散核，两者不能混用。

7.7 · 教材191—197页

38 贝塞尔函数和积分函数：附表46—52、58—62

原表46—52涉及J_ν, I_ν。它们是后续特殊函数部分的内容，这里只需认识为“有名称、可查表的本函数”，不必为完成本章的有理函数题先学完整个贝塞尔理论。

一个常用基础对是

$$\mathcal{L}[J_0(at)] = \frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}, \qquad \mathcal{L}[I_0(at)] = \frac{1}{\sqrt{p^2-a^2}}.$$

根式分别选在足够右的半平面上趋近p的分支。对$\nu > 0$，常用的一般式为

$$\mathcal{L}[J_\nu(at)] = \frac{(\sqrt{p^2+a^2}+p)^{-\nu}a^\nu}{\sqrt{p^2+a^2}},$$

$$\mathcal{L}[I_\nu(at)] = \frac{(\sqrt{p^2-a^2}+p)^{-\nu}a^\nu}{\sqrt{p^2-a^2}}.$$

第一式在适当右半平面成立，第二式对实$a>0$可取$\operatorname{Re}p>a$。要注意I_ν一族对应减号根式，不能把同一行中的两个根式取成互不一致的符号。更复杂的$t^\nu J_\nu$、$J_\nu(2\sqrt{t})$及带$h(t-\tau)$的条目，只需按题目匹配本函数结构，后续再学其来源。

表末几项使用

$$\operatorname{Si}(t)=\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,du,\qquad \operatorname{Ci}(t)=-\int_t^\infty\frac{\cos u}{u}\,du\quad(t>0),$$

以及指数积分Ei。常见对有

$$\mathcal{L}[\operatorname{Si}(t)]=\frac{\arctan(1/p)}{p},\qquad \mathcal{L}[\operatorname{Ci}(t)]=-\frac{\ln(p^2+1)}{2p}\quad(p>0).$$

$-\operatorname{Ei}(-t)=\int_t^\infty e^{-u}\,du/u$，其变换是$\ln(1+p)/p$。此外，

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}\right]=\ln\frac{p-b}{p-a}.$$

这是原表62同一关系交换a,b后的写法。先在实参数与足够大的实p验证符号，再取右半平面的解析对数。积分的两项在0处相消，切勿拆成两个发散积分。

这部分第一轮的必要程度是：认识函数名、懂它来自某个积分或方程、会查配对和条件。后续若研究扩散、圆柱坐标问题，这些表项才会成为常用工具；现在无需把62项全部背下。

第七章 / 7.8

原书习题路线与解题检查

教材197—201页

7.8 · 教材197—201页

39 原书1—5题：正变换与波形

原书题号	类型	先用什么方法
1(1)—1(6)	指数三角组合	线性、基础表，先化简
1(7)—1(11)	指数、相位、乘t	位移、三角展开、像函数微分
1(12)	时间二阶导数	先求本函数初值与初导数，再用$p^2F-pf(0)-f'(0)$
1(13)—1(16)	幂、积分、卷积	乘t、除p、乘积定理
1(17)—1(18)、2	阶跃启动与相位不同步	写成关于$t-\tau$的函数后套延迟

原书题号	类型	先用什么方法
3	阶梯加减斜坡，得到锯齿	把$K(t)$变换后做线性组合
4	周期锯齿、半波整流	只积分一个周期，再除$1-e^{-pT}$
5	乘$\sin bt$的通式	欧拉公式与复位移

原书1(12)中$f=e^{-at}\sin bt$，有$f(0)=0, f'(0)=b$，所以$\mathcal{L}[f'']=p^2b/[(p+a)^2+b^2]-b$。**这个末尾的$-b$不能漏掉**。

原书2的四种波形，分别先辨认：从0启动而只改相位；从0启动而用固定相位；推迟启动但正弦参数仍是t；启动与参数一起平移。应分别展开或重写，不要把它们一律乘同一个延迟因子。

原书3取$K=\sum_{n\ge 0}h(t-n)$，记$\mathcal{K}=1/[p(1-e^{-p})]$。则

$$\mathcal{L}[t-K(t-1)]=\frac{1}{p^2}-e^{-p}\mathcal{K},\qquad \mathcal{L}[K(t)-t]=\mathcal{K}-\frac{1}{p^2}.$$

两者是相反斜率的锯齿，边界点值不影响变换。

原书4的锯齿在一个周期内为$E(1-2t/T)$，半波整流为前半周期$A\sin bt$、后半周期0，$T=2\pi/b$。用周期式即可，半波整流结果为

$$F(p)=\frac{Ab}{(p^2+b^2)(1-e^{-\pi p/b})}.$$

7.8 · 教材197—201页

40 原书6：二十道逆变换按结构分组

小题	结构信号	路线
6(1)—6(5)	不同一次因子、可因式分解	先约分，再部分分式
6(6)—6(7)	一次与二次因子混合	留数或分成指数、正弦、余弦
6(8)、6(11)、6(14)	重极点	准确确定阶数，带上阶乘
6(9)、6(10)、6(12)、6(13)	三四次分母	先分解实因子与二次因子，再选方便方法
6(15)—6(16)	配方后的二次分母	写成$p-a$，别忘正弦频率系数
6(17)—6(19)	$e^{-\tau p}$	先求无延迟版本，再整体右移
6(20)	$(1-e^{-\pi p})^{-1}$	展成延迟响应的几何级数

例如6(2)分母$p^3+p^2+p+1=(p+1)(p^2+1)$，先与分子$1-p$组合做分式，不要直接解三次方程。6(11)分母$p(p-1)^3$，分别是0处简单极点与1处三阶极点。

6(15)为$(p-1)/[((p-1)^2+1)^2]$，对应$\frac{1}{2}te^t\sin t$；先辨认重二次分母，再位移。6(20)可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi p}\frac{p}{p^2+1},$$

因此本函数为$\sum_{n\ge 0} h(t-n\pi)\cos(t-n\pi)$。每个固定$t$只有有限项启动，适合按时间区间画图。

7.8 · 教材197—201页

41 原书7—9题：解方程与积分方程

原书7(1)—7(5)是常系数二阶初值问题，写出Y前先把初值项单独列在旁边。7(6)的右端先用$t-h(t-1)(t-1)$表示，不能整段误当t或1。

7(7)算子是$(D+1)^3$，右端$6e^{-t}$且零初值，变换后$Y=6/(p+1)^4$，所以$y=t^3e^{-t}$。看到重复算子时，重极点正好对应多项式乘指数。

7(8)—7(10)为方程组，先变换成线性代数方程，再利用相加、相减或消元。每个未知函数的初值都要带上，不能只给其中一条导数减初值。

原书8要求证明零初值受迫振动解：

$$y''+b^2y=f(t),\quad y(0)=y'(0)=0 \quad\Longrightarrow\quad y(t)=\frac{1}{b}\int_0^t f(u)\sin b(t-u)\,du.$$

先得到$Y=F/(p^2+b^2)$，再用卷积即可。原书9按7.5已经给出完整的代数路线和结果。两题共同说明：系统的零初值响应，是输入与基本响应核的卷积。

7.8 · 教材197—201页

42 全章工具选择与核对清单

看到什么	优先动作	容易漏什么
$e^{at}f(t)$	$p\mapsto p-a$	收敛域同时移动
$t^nf(t)$	对F求n次导	$(-1)^n$
$f^{(n)}(t)$	乘p^n并减初值	每一级初始导数
$h(t-a)g(t)$	改写为$t-a$的函数	g内部的参数也要改
$e^{-ap}F(p)$	逆变换后整体右移	阶跃开关
$F(p)G(p)$	卷积或部分分式	不是$f(t)g(t)$
周期波形	一个周期积分	周期长度、分母正负号

看到什么	优先动作	容易漏什么
有理像函数	约分、配方、分解	真正极点阶数
初值方程	逐项变换后解代数式	常数输入为常数除p

做完至少核对三件事：初始值是否满足；代回方程是否成立；若是变换题，重新正变换能否还原。对延迟题再分$t<a$与$t>a$看启动行为。检查往往比再背一条公式更能提高正确率。

第七章 / 7.9

二十四道自编检查题与完整解析

全章复习

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习1 由定义求变换并写收敛域

求$\mathcal{L}[e^{(2-3i)t}]$，说明在$p=0$时代数式有值是否代表积分存在。

展开解析：代数表达与积分收敛要分开

结果为$1/(p-2+3i)$，收敛域$\operatorname{Re}p>2$。在$p=0$代数式有限，但被积函数模按e^{2t}增长，原拉氏积分不收敛。那个有限值属于表达式的延拓值。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习2 用基础表处理线性组合

求$\mathcal{L}[2\sin 3t-\cos 2t+4]$。

展开解析：频率系数放在分子

线性拆开得$6/(p^2+9)-p/(p^2+4)+4/p$，可取$\operatorname{Re}p>0$。第一项分子是$2\cdot 3$，不是2。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习3 分数幂与原点可积性

求$\mathcal{L}[t^{-1/2}]$与$\mathcal{L}[t^{3/2}]$；$1/t$是否也可这样得到普通变换？

展开解析：指数必须大于-1

分别为$\sqrt{\pi}/\sqrt{p}$与$\Gamma(5/2)/p^{5/2}=3\sqrt{\pi}/(4p^{5/2})$，在$\mathrm{Re}\,p>0$取相容分支。$1/t$在0的积分发散，不能把$\alpha=-1$硬代进只适用于$\alpha>-1$的公式。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习4 时间缩放

已知$\mathcal{L}[f]=F$，求$\mathcal{L}[f(4t)]$与$\mathcal{L}[f(t/4)/4]$。

展开解析：两种写法互相核对

前者$F(p/4)/4$，后者$F(4p)$。用$f=e^{-t}$检验，分别为$1/(p+4)$与$1/(4p+1)$，与直接积分一致。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习5 指数位移与配方

求$\mathcal{L}[e^{-2t}\cos 3t]$及$\mathcal{L}^{-1}[(p+2)/((p+2)^2+9)]$。

展开解析：识别同一对变换

前者为$(p+2)/[(p+2)^2+9]$，逆变换就是$e^{-2t}\cos 3t$。准确收敛域为$\mathrm{Re}\,p>-2$，虽然$\mathrm{Re}\,p>0$也是一个更保守的可用区域。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习6 乘t与像函数求导

求$\mathcal{L}[te^{-t}\sin 2t]$。

展开解析：先位移再求负导数

基本像函数为$2/[(p+1)^2+4]$。取对p的负导数，得$4(p+1)/[((p+1)^2+4)^2]$，收敛域$\mathrm{Re}\,p>-1$。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习7 时间导数带什么初值

设$f=e^{-at}\sin bt$，求$\mathcal{L}[f'']$，并用$a=0$验证。

展开解析：先算右极限

$f(0+)=0, f'(0+)=b$，所以$\mathcal{L}[f'']=bp^2/[(p+a)^2+b^2]-b$。当$a=0$化为$-b^3/(p^2+b^2)$，与$f''=-b^2\sin bt$的变换一致。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习8 非零初值的一阶方程

解$y'+2y=1,\ y(0)=3$。

展开解析：初值不能删

变换后$(p+2)Y=3+1/p$，所以$Y=(1/2)/p+(5/2)/(p+2)$。解为$y=1/2+(5/2)e^{-2t}$。初值3，代回得到1。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习9 非零初值的二阶方程

解$y''+4y=0,\ y(0)=1, y'(0)=2$。

展开解析：两项初值都进入分子

$(p^2+4)Y=p+2$，所以$Y=p/(p^2+4)+2/(p^2+4)$，解为$\cos 2t+\sin 2t$。初导数为2，符合条件。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习10 时间累积

不先计算时间积分，求$\mathcal{L}[\int_0^t ue^{3u}\,du]$。

展开解析：先看积分结构

$\mathcal{L}[te^{3t}]=1/(p-3)^2$，累积一次除$p$，结果为$1/[p(p-3)^2]$，可取$\mathrm{Re}\,p>3$。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习11 真正的延迟

求$\mathcal{L}[h(t-2)(t-2)^2]$，并逆变换$e^{-2p}/(p+1)$。

展开解析：开关与函数参数一起移动

前者为$2e^{-2p}/p^3$。后者为$h(t-2)e^{-(t-2)}$；不能写成无开关的$e^{-(t-2)}$，也不能保留原参数写成$h(t-2)e^{-t}$。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习12 只延迟启动，参数没有移动

求$\mathcal{L}[h(t-2)t]$与$\mathcal{L}[h(t-\pi/2)\sin t]$。

展开解析：先改写延迟后的函数

第一式重写$t=(t-2)+2$，得$e^{-2p}(1/p^2+2/p)$。第二式令$u=t-\pi/2$，正弦变成$\cos u$，结果为$e^{-\pi p/2}p/(p^2+1)$。如果保留正弦表项，说明相位没跟着改。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习13 分段斜坡

$f(t)=t$在$0\le t<2$，$f(t)=2$在$t\ge 2$。求变换。

展开解析：减掉继续增长的部分

$f=t-h(t-2)(t-2)$，所以$F=(1-e^{-2p})/p^2$。用实数$p\to 0+$看$F\sim 2/p$，与长期平台值2相符。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习14 有限矩形脉冲

幅度3、从$t=1$开启到$t=4$关闭的脉冲，求变换并写逆向对应。

展开解析：两个开关相减

$f=3[h(t-1)-h(t-4)]$，$F=3(e^{-p}-e^{-4p})/p$。两端是否取3不影响积分。实数$p\to 0$时$F\to 9$，等于总面积$3(4-1)$。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习15 周期矩形波

每个周期$T=2$中，前1单位时间为1，后1单位时间为0，求像函数。

展开解析：一个周期积分再求几何级数

一个周期积分$(1-e^{-p})/p$，所以$F=(1-e^{-p})/[p(1-e^{-2p})]=1/[p(1+e^{-p})]$，$\mathrm{Re}\,p>0$。不是把周期当成1；约分后分母有加号不表示原波形本身反周期。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习16 卷积不是逐点乘法

取$f(t)=g(t)=1$，比较$\mathcal{L}[fg]$和$\mathcal{L}[f*g]$。

展开解析：最简单的反例

$fg=1$，变换为$1/p$；卷积$\int_0^t 1\,du=t$，变换为$1/p^2$。后者才等于$F(p)G(p)$。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习17 乘积逆变换

求$\mathcal{L}^{-1}[1/((p+1)(p+3))]$，分别用卷积和部分分式说明。

展开解析：两种方法相互验证

部分分式为$\frac{1}{2}[1/(p+1)-1/(p+3)]$，所以$f=(e^{-t}-e^{-3t})/2$。卷积为$\int_0^t e^{-(t-u)}e^{-3u}\,du=e^{-t}(1-e^{-2t})/2$，相同。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习18 卷积积分方程

解$f(t)=1+2\int_0^t f(u)\,du$。

展开解析：收集像函数

$F=1/p+2F/p$，所以$F=1/(p-2)$，$f=e^{2t}$。原式右边$1+2(e^{2t}-1)/2=e^{2t}$，且$f(0+)=1$。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习19 简单极点与配方

求$\mathcal{L}^{-1}[(p+3)/((p+1)^2+4)]$。

展开解析：分子要配成同一中心

$p+3=(p+1)+2$，故结果为$e^{-t}\cos 2t+e^{-t}\sin 2t$。用简单极点留数也能得到同一对共轭贡献。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习20 重极点的阶乘

求$\mathcal{L}^{-1}[1/(p+2)^3]$与$\mathcal{L}^{-1}[(p-1)/(((p-1)^2+1)^2)]$。

展开解析：两类重分母分别识别

第一式为$t^2e^{-2t}/2$。第二式用$\mathcal{L}[t\sin t]=2p/(p^2+1)^2$，再位移，得$\frac{1}{2}te^t\sin t$。不要因分母平方就一律按一个实二阶极点处理；第二式实际有两个共轭二阶极点。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习21 带延迟的受迫方程

解$y''+y=h(t-\pi)$，$y(0)=y'(0)=0$。

展开解析：先找无延迟响应

$Y=e^{-\pi p}/[p(p^2+1)]$。无延迟逆变换$g=1-\cos t$，故$y=h(t-\pi)[1-\cos(t-\pi)]$。启动前为0；启动后满足$y''+y=1$，在启动处$y,y'$连续，没有额外冲激。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习22 方程组的初值

解$x'=y,\ y'=x$，$x(0)=1,y(0)=0$。

展开解析：先代数消元

$pX-1=Y,\ pY=X$，得到$X=p/(p^2-1),Y=1/(p^2-1)$。所以$x=\cosh t,y=\sinh t$。分母为减号，不能写成$\cos,\sin$；两条导数关系和初值都满足。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习23 误差函数的逆变换

求$\mathcal{L}^{-1}[\sqrt{3}/(p\sqrt{p+3})]$，说明为什么不能把两个逆变换直接相乘。

展开解析：乘积对应累积卷积

由7.5的推导，结果为$\operatorname{erf}(\sqrt{3t})$。先拆成$\sqrt{3}(1/p)(p+3)^{-1/2}$，再卷积得到$\sqrt{3/\pi}\int_0^t u^{-1/2}e^{-3u}\,du$。逐点相乘会错误得到$\sqrt{3}e^{-3t}/\sqrt{\pi t}$，它在0附近发散，而正确答案从0连续增长。

7.9 · 全章复习 · 自编检查题

练习24 冲激与普通函数边界

求$\mathcal{L}^{-1}[(p+2)/(p+1)]$，并说明为何它不是一个普通连续函数。

展开解析：先做多项式除法

$(p+2)/(p+1)=1+1/(p+1)$，因果广义函数逆变换为$\delta(t)+e^{-t}$。像函数在实$p\to+\infty$时趋于1，不能由本章满足存在定理的普通连续函数单独实现；冲激项正好提供常数1。

7.9 · 全章复习

43 学完后怎样练到独立解题

先完成检查题1—14、16—20，对应基本公式、初值、分段和逆变换；再完成周期、延迟方程、方程组、误差函数与冲激的题，确认条件没有混淆。

回到原书，建议顺序为1和2建立公式熟练度，6练逆变换，7练初值问题，再做3—5的波形与证明，最后做8—9的卷积应用。特殊函数表先按需查，不要为了背完附表拖住整个章节。

卡住时先判断是“不会把时间表达式拆对”，还是“已经拆对但代数不会算”。前者回看两种位移、两种微分和阶跃改写；后者练部分分式、配方与留数。做到能自己写出每一步的依据、条件与检验，本章就不再是一堆互相打架的公式。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本第七章整理；正文印刷页169—190；附表191—197上部，章末习题197下部—201。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。第七章含24道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月22日。