数学物理方法 / 复变函数

第一章学习讲义

复数和平面点集

复数运算 → 模角形式 → 全部方根 → 区域判断。按教材顺序展开概念、例题、证明主线与解题条件；每章附原书习题路线和自编检查题。

严镇军教材配套讲读　教材3—23页　6道自编检查题　离线SVG公式与图解

本章对应教材印刷第3—23页，正文第3—19页，习题第20—23页。先把复数看成平面上的点和向量，再把式子翻译成距离、角度和区域。第一轮最重要的不是证明多少条恒等式，而是遇到一个复数式子时，知道该用代数形式还是极坐标形式。

学完的标准 你应能独立完成复数四则运算、求全部方根、画出模与辐角限定的集合，并分清区域、边界、去心邻域和单连通域。后面每一次判断解析范围、选积分路径、求级数收敛区域，都要用这些词。

学习顺序：先跟着例题写关键步骤，再独立完成检查题，最后按习题路线回到原书。证明段落均说明用途，不要求第一轮逐行背诵。

本章目录

1.1 复数	教材3—15页
1.2 复数序列的极限、无穷远点	教材15—17页
1.3 平面点集	教材17—19页
1.4 习题路线与检查题	原书习题20—23页

第一章 / 1.1

复数

教材3—15页

1.1 · 教材3—15页

01 一个复数为什么带着两个实数

写成 $z=x+iy$，其中 x,y 都是实数，$i^2=-1$。$x=\operatorname{Re}z$ 是实部，$y=\operatorname{Im}z$ 是虚部。**虚部是 y，不是 iy**。例如 $3-2i$ 的虚部是 -2。

复数相等，要同时比较实部与虚部：

$$x+iy=a+ib \quad\Longleftrightarrow\quad x=a,\ y=b.$$

所以一个复方程往往相当于两个实方程。这是以后从复数等式推出柯西—黎曼方程的基础。

实数就是虚部为零的复数；纯虚数通常要求实部为零、虚部不为零。零单独对待。复数之间没有与实数一样、同时兼容加法和乘法的大小次序，因而题里不要写 $z>1$；可以写 $|z|>1$、$\operatorname{Re}z>1$。

做题怎么用 题目要求“求实部、虚部”时，目标是整理成 $A+iB$，并确认 A,B 是实数。复数作分母时，先做下一单元的有理化。

1.1 · 教材3—15页

02 四则运算：乘法展开，除法乘共轭

加减按同类项合并。乘法按多项式展开，再用 $i^2=-1$：

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc).$$

共轭是 $\bar z=x-iy$。关键原因是

$$z\bar z=x^2+y^2=|z|^2,\qquad |z|=\sqrt{x^2+y^2}\ge 0.$$

因此 $z\neq 0$ 时

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar z}{|z|^2}.$$

这不是新技巧的堆积，而是把复分母换成正实数。

完整例题 计算 $(3-4i)/(4+3i)$。

$$\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{4^2+3^2}=\frac{-25i}{25}=-i.$$

分子实部是 $12-12=0$，虚部是 $-9-16=-25$。算完可乘回去检查：$(-i)(4+3i)=3-4i$。

必须熟练 i^n 按四项循环；$\overline{z_1z_2}=\bar z_1\bar z_2$；分母不能为零。交换律、结合律和分配律照常使用，第一轮无需重新背它们的证明。

1.1 · 教材3—15页

03 共轭为什么能把“实数条件”变成方程

记住三条：

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar z}{2},\qquad \operatorname{Im} z=\frac{z-\bar z}{2i},\qquad |z|^2=z\bar z.$$

一个数 w 是实数，当且仅当 $w=\bar w$。它是纯虚数的条件为 $w=-\bar w$ 且 $w\neq 0$。遇到“证明某复数式为实数”，这比直接拆分实虚部经常更省力。

跟着教材例1走一遍 设 $\operatorname{Im} z\neq 0$、$z\neq\pm i$。问 $w=z/(1+z^2)$ 何时是实数?

先把“实数”改成 $w=\bar w$，再交叉相乘：

$$\frac{z}{1+z^2}=\frac{\bar z}{1+\bar z^2}\quad\Longleftrightarrow\quad (z-\bar z)(1-z\bar z)=0.$$

因为虚部不为零，第一因子不为零，故必须有 $|z|=1$。反过来代入也成立，因此这是充要条件。这里 $z\neq\pm i$ 是为了保证原式有意义，不能在消分母后忘掉。

实系数多项式为什么有共轭根 若 P 的系数全为实数，则 $P(\bar z)=\overline{P(z)}$。所以 $P(z_0)=0$ 推出 $P(\bar z_0)=0$。这是教材例3的全部主线；限制是“实系数”，复系数一般没有此性质。

1.1 · 教材3—15页

04 模不等式：以后估计积分和级数的工具

模是长度，$|z-a|$ 是两点间距离。最常用的是

$$|z+w|\le|z|+|w|,\qquad \big||z|-|w|\big|\le|z-w|.$$

第一条说直线距离不超过折线长度；第二条说两条边长的差不超过第三边。还有

$$|\operatorname{Re} z|\le|z|,\quad |\operatorname{Im} z|\le|z|,\quad |zw|=|z||w|.$$

证明看懂哪一步就够 展开

$$|z+w|^2=|z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}(z\bar w)\le(|z|+|w|)^2.$$

根本工具是 $\mathrm{Re}(z\bar w)\le|z\bar w|=|z||w|$。反三角不等式则把 $z=(z-w)+w$ 代入第一条，再交换 z,w。

做题的方向感 要给分子上界，用三角不等式；要证明分母远离零，用反三角不等式。例如 $|z|=2$ 时

$$|z-1|\ge\big||z|-1\big|=1,\qquad\left|\frac{1}{z-1}\right|\le1.$$

这是第三章“长大不等式”里找上界的基本动作。

教材第11页的等号表述要细分 对非零 z,w，$|z+w|=|z|+|w|$ 要求同向；而 $\big||z|-|w|\big|=|z-w|$ 也要求同向。若换成 $\big||z|-|w|\big|=|z+w|$，就应是反向。先看中间到底是加号还是减号，不能笼统说“三点共线就都取等号”。

1.1 · 教材3—15页

05 把复数放到平面上：模、辐角和主值

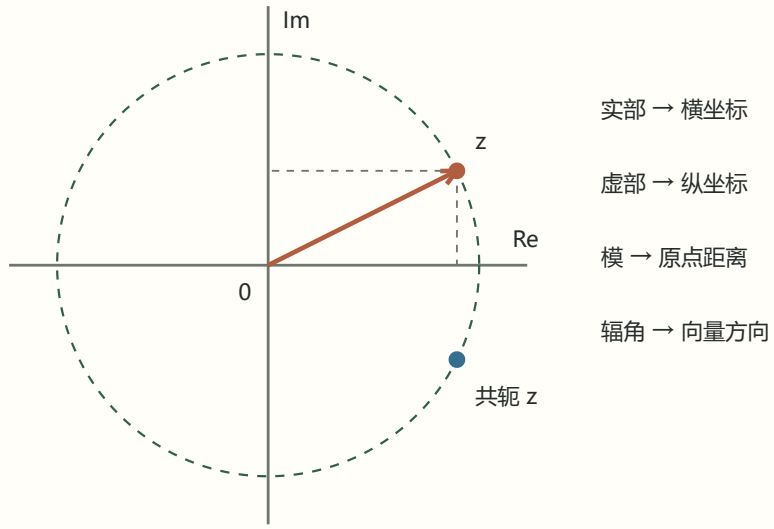
$z=x+iy$ 对应点 (x,y)，也对应原点指向该点的向量。非零复数可写成

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta},\qquad r=|z|>0.$$

角度加上 $2k\pi$ 不改变这个点。沿用本书记号：$\mathrm{Arg}\,z$ 表示全部辐角，$\arg z$ 表示区间 $(-\pi,\pi]$ 中的主值。

求辐角的可靠顺序 先定位象限，再找参考角，最后调整到指定主值区间。例如 $z=-1-i$ 在第三象限，主辐角是 $-3\pi/4$，不是 $\pi/4$；全部辐角是 $-3\pi/4+2k\pi$。$\arctan(y/x)$ 本身不能辨认象限。$z=0$ 没有辐角。

图 1-1 复平面中的点、共轭与模



共轭关于实轴反射；同一个点的辐角可相差2π。

图示 第一象限：2+i；当前点 (2, 1)，模 2.236，主辐角 0.148π

为什么讲指数形式 加减适合 $x+iy$；乘除、乘方、开方适合 $re^{i\theta}$。换形式是为了减少计算，不是为了把一个答案写三遍。

1.1 · 教材3—15页

06 乘一个复数，就是旋转并缩放

设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$、$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

乘 i，逆时针转 $\pi/2$，长度不变。乘 $2e^{i\pi/3}$，先转 $\pi/3$，再把长度乘2。共轭则关于实轴反射。

注意主值 角度相加得到的是一个辐角，未必已经是主辐角。例如两个辐角均为 $3\pi/4$ 的数相乘，角度和为 $3\pi/2$，但主值应为 $-\pi/2$。

完整例题 求 $(1+i)^8$。先写 $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$，再得

$$(1+i)^8=(\sqrt{2})^8e^{2\pi i}=16.$$

这比连续展开八次清楚得多。反过来，计算 $(1+i)+(1-i)$ 时就不要转成极坐标。

1.1 · 教材3—15页

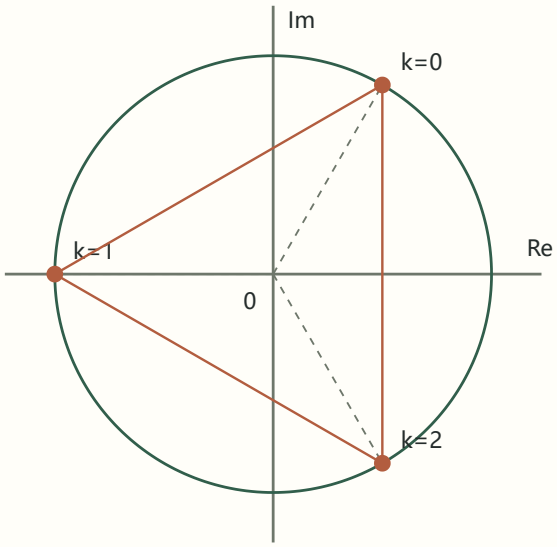
07 方根：先列一般式，再数够全部答案

求 $w^n = z \neq 0$，写 $z = re^{i\theta}$、$w = \rho e^{i\varphi}$。比较模和角：$\rho^n = r$，$n\varphi = \theta + 2k\pi$。所以

$$w_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

这 n 个根互不相同，均匀分布在半径 $r^{1/n}$ 的圆上。k 再增加 n 就重复。$z = 0$ 只有根0，重数为 n。

图 1-2 方根均匀排列在同一个圆上



共有 3 个不同根

每个根的模为2

相邻夹角 2π/3

先加2kπ，再除以n；只写一个根不能回答“全部值”。

图示 三次方根：w³=-8；w³=-8；k 从0到2

教材例8的逐步计算 $w^3 = -8 = 8e^{i\pi}$，模为2，角分别为 $\pi/3, \pi, 5\pi/3$，故全部根为

$$1 + \sqrt{3}i, \qquad -2, \qquad 1 - \sqrt{3}i.$$

负实数在复数范围内开三次方，不只有实根 -2。

平方根的代数方法 若 $(x+iy)^2 = a + ib$，则 $x^2 - y^2 = a$、$2xy = b$、$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$。由此

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2}, \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2}.$$

最后用 $2xy = b$ 配符号，不能把 x, y 的正负独立任取成四个根。例如 $\sqrt{3+4i}$ 的全部值为 $\pm(2+i)$。

1.1 · 教材3—15页

08 曲线与集合：先把模翻译成距离

常见翻译如下。

复数条件	几何意思	容易漏的地方
$\lvert z-a\rvert=R$	圆心 a、半径 R 的圆周	$R>0$
$\lvert z-a\rvert<R$	开圆盘	不含圆周
$\lvert z-a\rvert=\lvert z-b\rvert$	两点连线的垂直平分线	假设 $a\neq b$
$\lvert z-a\rvert+\lvert z-b\rvert=L$	焦点为 a,b 的椭圆	$L>\lvert a-b\rvert$
$\arg(z-a)=\alpha$	从 a 出发的射线	不含起点 a

例如教材 $\lvert z-1\rvert+\lvert z+2-i\rvert=6$ 的两个焦点是 1 和 $-2+i$。重点在认出“到两定点的距离之和”，不必先展开根号。若题目真要半轴：长半轴3，焦距一半 $\sqrt{10}/2$，短半轴 $\sqrt{26}/2$。

距离比的圆 $\lvert(z-1)/(z+1)\rvert=2$，先保留 $z\neq-1$，再平方：

$$(x-1)^2+y^2=4[(x+1)^2+y^2].$$

整理为 $(x+5/3)^2+y^2=16/9$。比值为1时则退化为直线 $x=0$。这类轨迹在第三章两个异号电荷的等势线里会再出现。

1.1 · 教材3—15页

09 代数曲线改写、三角求和和弦距为什么出现

圆的复数方程 把 $x=(z+\bar z)/2$、$y=(z-\bar z)/(2i)$、$x^2+y^2=z\bar z$ 代入实方程即可。一般式

$$A\lvert z\rvert^2+\bar Bz+B\bar z+C=0\quad(A,C\text{ 为实数},A\neq0)$$

可配方成

$$\left|z+\frac{B}{A}\right|^2=\frac{\lvert B\rvert^2-AC}{A^2}.$$

右端正、零、负分别对应真圆、一个点、空集。$A=0$ 时需另看是否为直线。教材这段是训练“同一对象的两种语言”，做轨迹题时有用。

三角求和的统一招数 用 $e^{ik\theta}$ 打包正弦与余弦：

$$\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}=\frac{e^{i\theta}(1-e^{in\theta})}{1-e^{i\theta}}\quad(\theta\notin2\pi\mathbb{Z}).$$

化为半角式后，取实部得到余弦和，取虚部得到正弦和。先熟悉有限等比和，比死背两条长三角式有价值。若 $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$，回原和式直接算，不能除以零。

教材例4的弦距可第二轮看 它定义

$$d(a,b)=\frac{2|a-b|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|b|^2}}.$$

这与下一节把平面放到球面上的距离有关。证明主线是把 $a-b$ 拆成与 $a-c, c-b$ 有关的两项，再用三角不等式及 $|1+b\bar{c}| \le \sqrt{1+|b|^2}\sqrt{1+|c|^2}$。最后一条可由两边平方、差为 $|b-c|^2 \ge 0$ 验证。第一轮普通运算和轨迹题无需背这条弦距公式；保留它，是为了说明无穷远点能和有限点放在同一几何模型里，而不是为了增加一个常考公式。

第一章 / 1.2

复数序列的极限、无穷远点

教材15—17页

1.2 · 教材15—17页

10 复数收敛，就是实部虚部同时收敛

定义 $z_n \to a$ 是 $|z_n-a| \to 0$。它说的是到目标点的距离越来越小，与从哪个方向来无关。用严格语言：任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使 $n>N$ 时每个 z_n 都落在 $|z-a|<\varepsilon$ 内。

若 $z_n=x_n+iy_n$、$a=\alpha+i\beta$，则

$$z_n \to a \quad \Longleftrightarrow \quad x_n \to \alpha \text{ 且 } y_n \to \beta.$$

为什么成立？一方面每个坐标差不超过总距离；另一方面总距离不超过两坐标差绝对值之和。这恰好用到上一节的不等式。

两个对照例子 $z_n=(1+in)/n=1/n+i \to i$。而 $z_n=i^n$ 在四个点之间循环，不收敛。即使 $|z_n|=1$ 始终不变，也不能推出复数本身收敛。

若 $|q|<1$，则 $q^n \to 0$，理由是 $|q^n|=|q|^n \to 0$，不必追踪每次旋转的角度。若 $|q|=1$ 且 $q \neq 1$，q^n 不收敛，因为相邻项距离 $|q^{n+1}-q^n|=|q-1|$ 不趋零。

1.2 · 教材15—17页

11 无穷远点：模趋于无穷，方向可以乱转

复平面的 ∞ 只有一个。定义

$$z_n \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad |z_n| \to +\infty.$$

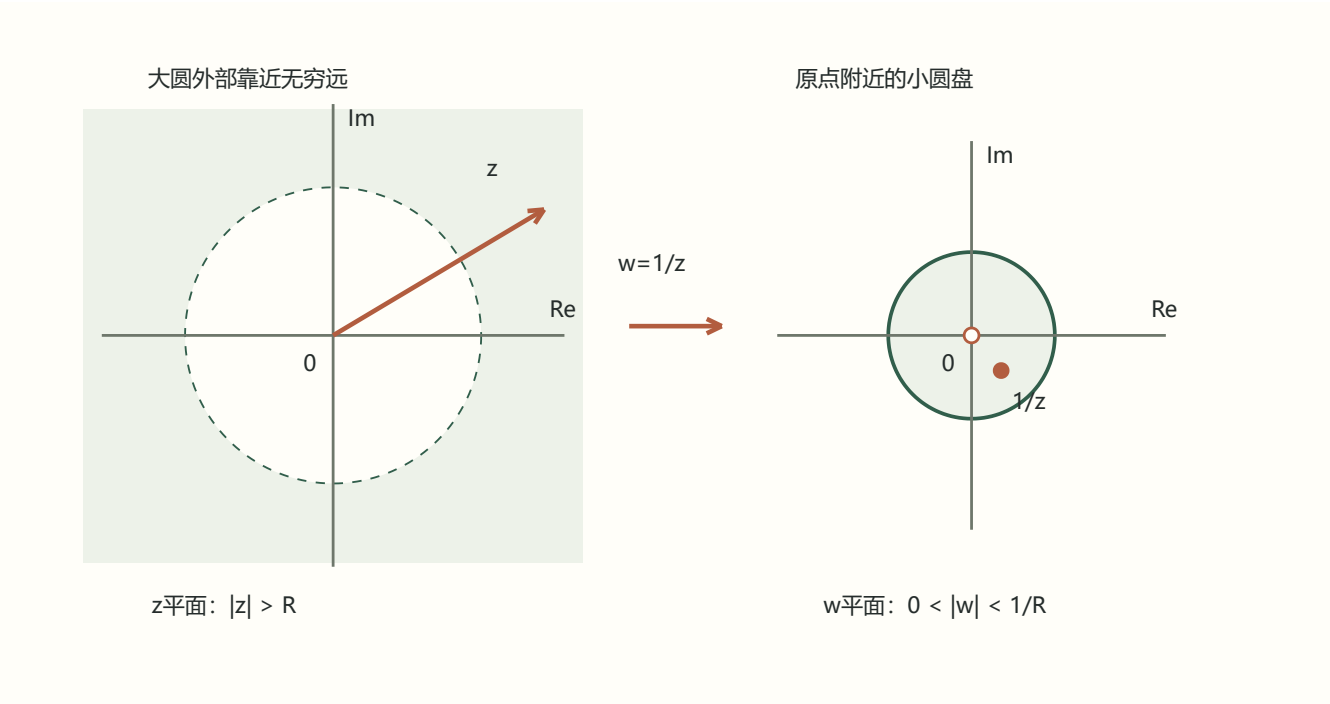
因此 n、$-n$、in、ne^{in} 都趋向同一个无穷远点；仅仅“无界”还不够，例如奇数项为 n、偶数项为0的序列无界，却不趋于 ∞。

最实用的换元是

$$z_n \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{z_n} \to 0$$

（最终各项非零）。无穷远点的邻域写成 $|z| > R$，在球面上对应围绕北极的一小块。

图 1-3 倒数把无穷远附近变成原点附近



模越大的z，倒数越靠近0；角度会反号。

黎曼球面要理解到哪一步 从球面北极向平面作投影，每个有限复数对应一个非北极点；模越大，球面上的点越靠近北极。把北极补上，就补上了 ∞。第一轮无需计算投影坐标；要会把“研究无穷远”换成“研究 $w = 1/z$ 在零附近”。第四章判断无穷远点的奇性会真正用到它。

运算边界 $1/\infty = 0$ 是延拓记号，$\infty - \infty$、$0 \cdot \infty$、∞/∞ 不由这些规则决定。遇到这种形式要回到具体极限。

第一章 / 1.3

平面点集

教材17—19页

1.3 · 教材17—19页

12 邻域、内点、边界：画一个小圆盘来判断

a 的 ρ 邻域是 $|z-a|<\rho$；去心邻域是 $0<|z-a|<\rho$，区别只是是否保留中心。

对集合 E，内点是能找到一个小圆盘完全留在 E 中的点；外点是能找到小圆盘完全避开 E 的点；边界点则每一个小圆盘都同时碰到 E 与其补集。

边界不等于“集合里面的边缘” $E=\{|z|<1\}$ 的圆周不在 E 中，却仍然是它的边界。$E=\{|z|\le 1\}$ 的圆周既是边界，又属于集合。

全由内点组成的是开集；包含自身全部边界点的是闭集；能装进一个足够大的圆盘里的是有界集。开、闭不是互为否定：$\{|z|<1\}\cup\{2\}$ 既不开放也不封闭，空集和全平面既开又闭。

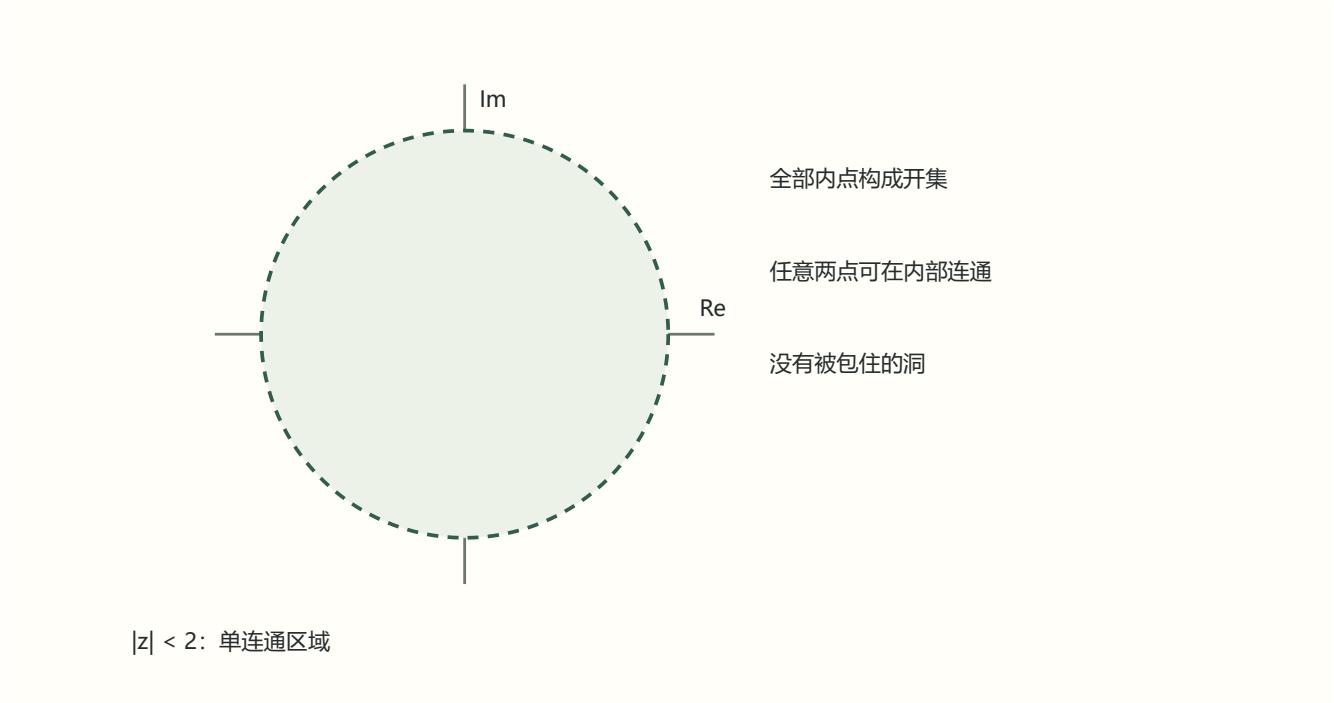
1.3 · 教材17—19页

13 区域、单连通和多连通：不是看外形圆不圆

本书把“非空、开、连通”的集合称为区域。连通在这里可用折线连接来理解：集合内任意两点能沿始终留在集合内的折线走到一起。两个分离的圆盘的并是开集，但不是一个区域。

单连通的操作性判断 在区域里任取一条简单闭曲线，它围住的内部也全部留在区域里，则该区域单连通。圆盘、半平面、开扇形、沿一条射线割开的平面都是常见例子。圆环和去心圆盘有洞，是多连通域。

图 1-4 圆盘、圆环与割开圆盘



图示 开圆盘；虚线边界和空心点均不属于区域。

这里“洞”包括删去一个点，不要求洞有面积。$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 有洞；$\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 的缺口通到无穷远，没有把某个洞完整包住，是单连通的。第三章能否把闭路缩成点、第二章能否选全域连续的对数，都会依赖这个区别。

1.3 · 教材17—19页

14 曲线为什么要带参数和方向

写 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$，$a\le t\le b$，就给了一条曲线及其行进顺序。$z(a)$ 是起点，$z(b)$ 是终点。无自交的曲线称简单曲线；若首尾相同、除端点外不重复，就是简单闭曲线。

最常用的两个参数式是

$$z=A+t(B-A),\quad 0\le t\le 1;\qquad z=a+Re^{it},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

前者从 A 走到 B；后者绕圆逆时针一周。把 t 范围倒过来会改变方向。椭圆可写 $z=a\cos t+ib\sin t$；$z=t+i/t$（$t\neq 0$）满足 $xy=1$，但仍要看参数范围决定走哪一支。

为什么讲约当曲线定理 简单闭曲线把平面分成内部和外部，这是说“奇点在曲线里面”的依据。你要会分辨简单闭曲线并读懂内部；不必在本课程第一轮证明这一拓扑定理。第三章开始还会要求曲线分段光滑，以保证积分可以按参数计算。

第一章 / 1.4

习题路线与检查题

原书习题20—23页

1.4 · 原书习题20—23页

15 先练哪些题，做到什么程度

题型	原书题号	最先写下的东西	过关表现
四则运算、极坐标、方根	1—6	代数形式或模角形式	全部根列齐、无分母零点
模不等式与恒等式	8—11	共轭展开、三角不等式	估计方向正确
共线、正方形与轨迹	12—15、18、20、22	向量差、距离、角度	先识别几何量再展开
序列与辐角连续性	16—17	模、实虚部、主值区间	知道模收敛不够
区域和参数曲线	19、21	所有不等式取交集	边界、开闭、洞都说清楚
有限三角求和	7	等比和 $\sum e^{ik\theta}$	能取实部、虚部

第一轮建议按表从上往下做，每一类至少独立完成两小题；某一类错了，就回到对应单元重算例题。原书第11题第二小题是较强的不等式证明，第12—15题几何证明也比直接运算费时，可放第二轮，不影响你先学习解析函数。第17题提醒：主辐角在负实轴处会跳跃，在原点处没有定义；这会直接影响对数分支。

以下是自编检查题，与原书习题另行编号。答案在屏幕上默认折叠，打印版全部展开。

1.4 · 原书习题20—23页 · 自编检查题

练习1 代数运算与共轭

求 $(2+i)/(1-i)$，并分别写出结果的实部、虚部和模。

展开解析：先消复分母

乘 $(1+i)/(1+i)$，得到 $(1+3i)/2$。实部 $1/2$，虚部 $3/2$，模为 $\sqrt{10}/2$。也可用模的商检查：$\sqrt{5}/\sqrt{2}=\sqrt{10}/2$。若你把虚部写成 $3i/2$，需回到第一单元辨认定义。

1.4 · 原书习题20—23页 · 自编检查题

练习2 方根必须列全

求 $z^4=-16$ 的全部根，并说明它们的几何分布。

展开解析：模开四次方，角先加整周再除4

$-16=16e^{i\pi}$，故根为 $2e^{i(\pi/4+k\pi/2)}$，$k=0,1,2,3$。代数形式为 $\sqrt{2}(1+i)$、$\sqrt{2}(-1+i)$、$\sqrt{2}(-1-i)$、$\sqrt{2}(1-i)$。它们位于半径2的圆上，相邻夹角 $\pi/2$。不能只写主根。

1.4 · 原书习题20—23页 · 自编检查题

练习3 一个不等式怎么变成半平面

画出 $|z-1|<|z+1|$，判断它是否为区域、是否单连通，并写边界。

展开解析：离右侧定点更近

设 $z=x+iy$，平方后得到 $(x-1)^2+y^2<(x+1)^2+y^2$，即 $x>0$。这是右半平面，是开而连通的区域，也是单连通域；边界是虚轴 $x=0$，不包含在集合内。注意右侧的 $z+1$ 表示到 -1 的距离。

1.4 · 原书习题20—23页 · 自编检查题

练习4 判断收敛不要只看模

判断 $z_n=(1+i)^n/2^n$、$w_n=i^n$、$v_n=ne^{in}$ 的极限。

展开解析：模趋零、模固定、模趋无穷分别处理

$|z_n|=(1/\sqrt{2})^n\to 0$，所以 $z_n\to 0$。w_n 在四点循环，实部虚部均不能同时收敛，故没有极限。
$|v_n|=n\to\infty$，所以在扩充复平面中 $v_n\to\infty$；旋转不会妨碍趋向无穷远点。

1.4 · 原书习题20—23页 · 自编检查题

练习5 区域、边界和洞

比较 $E_1=\{0<|z|<2\}$、$E_2=\{|z|\le 2\}$、$E_3=\{0<|z|<2,-\pi<\arg z<\pi\}$。

展开解析：开圆盘、闭圆盘与割开的圆盘

E_1 是区域，多连通，边界是圆周 $|z|=2$ 与点0。E_2 闭而非开，按本书定义不是区域；它是闭圆盘，边界只有 $|z|=2$。E_3 是删去非正实轴的开圆盘部分，是单连通域；边界含外圆周和从0到 -2 的线段。边界条件不能只把每个严格不等式机械地改成等号，还要检查哪些边界点确实能被集合内点逼近。

1.4 · 原书习题20—23页 · 自编检查题

练习6 下界比精确值更有用

当 $|z|=3$ 时，证明 $|1/(z-1)^2| \le 1/4$；何时取等号?

展开解析：先估计分母

反三角不等式给 $|z-1| \ge 3-1=2$，取平方并倒数即得结论。$z=3$ 时取等号；几何上是半径3的圆上离点1最近的位置。以后估计圆周积分时，先找这样一个统一上界，再乘路径长度。

1.4 · 原书习题20—23页

16 一页回看与进入第二章的门槛

看到加减：用 $x+iy$。看到乘方开方：用 $re^{i\theta}$。看到“实数”：考虑与共轭相等。看到模：先翻译成长度或距离。看到极限：先判断是模趋零、坐标分别趋定值，还是模趋无穷。看到区域：依次检查开、连通、有没有洞。

如果练习1—6能在不看答案时做对，并能解释“主辐角为什么会跳跃”“去心圆盘为什么有洞”，就可以进入第二章。弦距的完整推导和较长几何证明可留第二轮；这里保留它们的目的与主线，避免你把尚未熟练的背景证明误认为前进的门槛。

来源、编排与掌握要求

依据用户提供的严镇军《数学物理方法》扫描本第一章整理；正文印刷页3—19，章末习题20—23。扫描PDF文件页序等于印刷页码加6。按原书节序覆盖各主题，以重新讲解、推导主线和例题说明组织，未逐字复制原文。自编检查题与原书习题分开编号，原书题号可在本章习题路线中查找；本文件不声称是全部原书习题的逐题答案册。

第一轮优先掌握能独立做题所需的概念、步骤和适用条件；背景、证明及拓展均说明用途和暂缓深究的边界。第一章含6道自编检查题及完整解析。公式与SVG内嵌，可离线阅读；屏幕答案默认折叠，打印时自动展开。整理日期：2026年10月15日。